Boltzmann equation 2 TZFP Lecture 3A - 13. 04. 2021

Literatura:

Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu

„Velký Kracík“

J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht

Academia Praha 1974

Fyzika plazmatu

J.Kracík, J. Tobiáš

Academia, Praha 1966

„Malý Kracík“

1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu N částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem V, je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen N interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v $6N$ rozměrném fázovém prostoru Γ, který má souřadnice $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$, kde $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i$ jsou polohové vektory i-té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element $\mathrm{d}\Gamma$ v Γ prostoru jako

$$\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N .$$

Protože každý systém je reprezentován fází v Γ prostoru, soubor velkého počtu W systémů bude reprezentován „oblakem“ W fází v Γ. Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotou) v Γ prostoru v čase t jako $\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$, je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v $\mathrm{d}\Gamma$ kolem bodu $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ v čase t, roven

$$\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N$$

a

$$\int \varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N = W . \tag{1.1}$$

Fázovou hustotu $P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$, odpovídající jednomu systému, tj.

$$P_N = \frac{\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)}{W} \tag{1.2}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu $P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ je zřejmé, že

$$\int P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N = 1 . \tag{1.3}$$

Fázový prostor

- Přecházíme z exaktního popisu na popis pomocí pravděpodobností.
- Rozdělovací funkce

N interagujících částic ---- <u>každá se řídí zákony klasické dynamiky</u>.

Element d Γ v Γ prostoru jako: $d\Gamma = dr_1\, dr_2 \ldots dr_N\, dp_1 \ldots dp_N = dr^N dp^N$

<u>Soubor systému</u> představuje „oblak“ s hustotou $\rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$

Fázový prostor

- Přecházíme z exaktního popisu na popis pomocí pravděpodobností.
- Rozdělovací funkce

N interagujících částic ---- <u>každá se řídí zákony klasické dynamiky</u>.

Element d Γ v Γ prostoru jako: $d\Gamma = dr_1\, dr_2 \ldots dr_N\, dp_1 \ldots dp_N = dr^N dp^N$

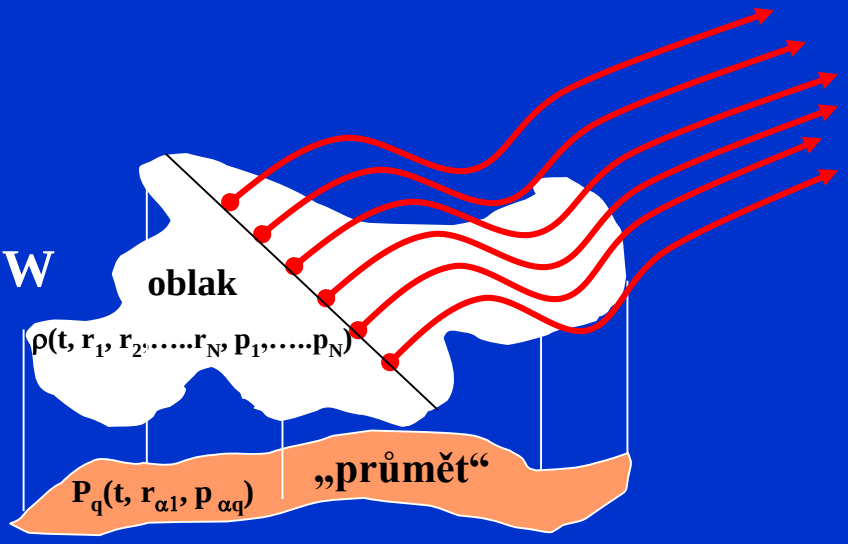
<u>Soubor systému</u> představuje „oblak“ s hustotou $\rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$

<u>Celkový počet fází v souboru je</u>

$$\int \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^N dp^N = W$$

<u>Hustota pravděpodobnosti</u>

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$$



Integraci P přes podmnožinu proměnných získáme „průmět“ nezávislý na souřadnicích $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^{N-q} dp^{N-q}$$

<u>Pokud prointegrujeme přes impulsy získáme pravděpodobnost, že systém má určitou konfiguraci rozložení v prostoru</u>

$$P_N(t, r_1, \ldots\ldots r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dp^N$$

Liouvillův teorém

- Hamiltonián N častíc
- Zobecněné souřadnice

Sledujeme časový vývoj souboru N částic…
každá částice se pohybuje v souladu s Hamiltonovými rovnicemi:

$$\dot{p}_{i_\alpha} = -\frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial r_{i_\alpha}} \qquad (1.9)$$

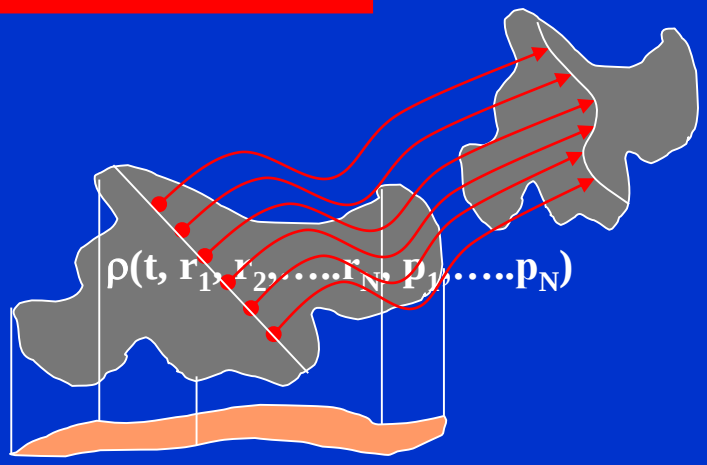
$$\dot{r}_{i_\alpha} = \frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial p_{i_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace J=1 a proto je

$$\int d\Gamma = \int dr^N dp^N = \text{const}, \qquad (1.10)$$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina…

proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“



J=1

1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu N částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem V, je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen N interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v $6N$ rozměrném fázovém prostoru Γ, který má souřadnice $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$, kde $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{p}_i$ jsou polohové vektory i-té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element $\mathrm{d}\Gamma$ v Γ prostoru jako

$$\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N .$$

Protože každý systém je reprezentován fází v Γ prostoru, soubor velkého počtu W systémů bude reprezentován „oblakem" W fází v Γ. Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotou) v Γ prostoru v čase t jako $\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$, je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v $\mathrm{d}\Gamma$ kolem bodu $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ v čase t, roven

$$\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N$$

a

$$\int \varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N = W . \tag{1.1}$$

Fázovou hustotu $P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$, odpovídající jednomu systému, tj.

$$P_N = \frac{\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)}{W} \tag{1.2}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu $P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ je zřejmé, že

$$\int P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N = 1 . \tag{1.3}$$

1.2 Liouvillův teorém

Sledujme dále časový vývoj souboru N částic systému. Z mechaniky je známo, že pohyb každé částice se děje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného problému; fázový bod v Γ prostoru se bude pohybovat opět podle Hamiltonových rovnic, které – zapsány pro i-tou částici – jsou

$$\dot{p}_{i_\alpha} = -\frac{\partial H(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)}{\partial r_{i_\alpha}} \tag{1.9}$$

$$\dot{r}_{i_\alpha} = \frac{\partial H(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)}{\partial p_{i_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3 ,$$

kde $H(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ je hamiltonián ~~částice~~ daného systému.

Z klasické mechaniky je známo*), že na časovou změnu veličin p_{i_α} a r_{i_α} při pohybu částic systému je možno hledět jako na kanonické transformace. Dále je známo, že fázový objem, tj. $\int \mathrm{d}\Gamma = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N$ je invariantní vzhledem ke kanonickým transformacím. Odtud dostáváme důležitý závěr: Každý bod fázového prostoru se pohybuje ve shodě s Hamiltonovými rovnicemi daného systému, stejným způsobem se pohybuje i oblak fázových bodů a navíc objem tohoto oblaku (fázový objem) se nemění, tj.

$$\int \mathrm{d}\Gamma = \text{konst} , \tag{1.10}$$

*) Viz např. L. D. Landau, E. M. Lifšič: Mechanika. Moskva (1965), s. 183.

i když se může měnit tvar tohoto objemu a tedy plocha, kterou je tento objem uzavřen.

Rovnice (1.10) je vlastně matematický zápis Liouvillova teorému a říká, že fázový objem se pohybuje tak, jako kdyby byl nestlačitelná kapalina. Pro takovéto kapaliny však platí rovnice kontinuity (v Γ prostoru)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho V) = 0 \tag{1.11}$$

Úvod

- Formy Liouvilovho teorému
- Vnější a vnitřní síly

(1.11) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho V) = 0$$

Pořadí deriivací

nebo, což je totéž

(1.12) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} V + V \,.\, \operatorname{grad} \varrho = 0 ,$$

kde V je „rychlost" v Γ prostoru (o složkách $\dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_N, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_N$), která splňuje rovnici

(1.13) $$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial \dot{r}_{i_\alpha}}{\partial r_{i_\alpha}} + \frac{\partial \dot{p}_{i_\alpha}}{\partial p_{i_\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r_{i_\alpha} \partial p_{i_\alpha}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i_\alpha} \partial r_{i_\alpha}} \right) = 0 ,$$

jako důsledek platnosti Hamiltonových rovnic (1.9). Rovnice (1.12) má potom tvar

(1.14) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + V \,.\, \operatorname{grad} \varrho = 0 ,$$

nebo

(1.15) $$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + [\varrho; H] = 0 ,$$

Collisions

$\rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$

což můžeme psát jako

(1.16) $$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} v_i \,.\, \nabla_{r_i} \varrho + \sum_{i=1}^{N} (X_i + F_i) \,.\, \nabla_{p_i} \varrho = 0 ,$$

kde $[\varrho; H]$ jsou Poissonovy závorky, v_i je rychlost i-té částice, X_i je vektor vnější síly, působící na i-tou částici, a F_i je vektor vnitřní síly působící na i-tou částici, která pochází od $(N-1)$ zbývajících částic.

Po vydělení rovnic (1.14), (1.15) a (1.16) počtem W systémů dostáváme rovnice pro P_N

(1.14′) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} + V \,.\, \operatorname{grad} P_N = 0 ,$$

(1.15′) $$\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0 ,$$

(1.16′) $$\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} v_i \,.\, \nabla_{r_i} P_N + \sum_{i=1}^{N} (X_i + F_i) \,.\, \nabla_{p_i} P_N = 0 .$$

Pokud prointegrujeme přes impulsy …

$P_N(t, r_1, \ldots r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, \mathrm{d}p^N$

Závislost na čase a poloze

Hustota pravděpodobnosti

$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$

1.3 Gibbsův H teorém

- entropia
- reversibilita a ireversibilita procesů

Všimněme si nyní alespoň částečně časového vývoje systému N částic, a to z hlediska vratnosti či nevratnosti procesů, které v tomto systému probíhají. Ze zkušenosti je známo, že většina procesů, které probíhají v přírodě, jsou procesy nevratné. To znamená, že entropie takovéhoto systému roste s časem; v rovnováze je potom entropie konstantní. Ve statistické fyzice je entropie úzce spjata s takzvanou H-funkcí a to vztahem

Hustota pravděpodobnosti

$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$

Použijíc **Liouvilla teorému** dospějeme k výrazu

$S=-kH=-k\int P_N \ln P_N d\Gamma$ kde $H = \int P_N \ln P_N d\Gamma$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial P_N}{\partial t} (\ln P_N + 1) d\Gamma .$$

Uvážíme-li nyní platnost Liouvillovy rovnice (1.15′), můžeme psát, že

$$(1.22) \quad \int \frac{\partial P_N}{\partial t} \ln P_N \, d\Gamma = -\int [H; P_N] \ln P_N \, d\Gamma = \int P_N [H; \ln P_N] \, d\Gamma =$$

$$= \int [H; P_N] \, d\Gamma = -\int \frac{\partial P_N}{\partial t} d\Gamma .$$

=0

dH/dt=0 → dS/dt=0

To znamená, že systém se časově nevyvíjí…..
t.j. nerovnovážný systém se nemůže nikdy dostat do stavu rovnovážného.

Paradox- klasická mechanika vede k přísně reverzibilnímu popisu, zatím co příroda se chová ireversibilně … ????

Časový vývoj – entropia roste ……Entropia systému roste, dS/dt>0

1.3 Gibbsův H teorém

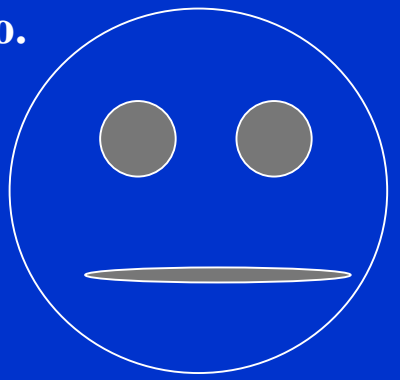
- entropia
- reversibilita a ireversibilita procesů

$S=-kH=-k\int P_N \ln P_N, \quad$ kde $H = \int P_N \ln P_N$

Použijíc **Liouvilla teorému** dospějeme k výrazu

$dH/dt=0 \longrightarrow dS/dt=0$

To znamená, že systém se časově nevyvíjí…..
t.j. nerovnovážný systém se nemůže nikdy dostat do stavu rovnovážného.



Paradox- klasická mechanika vede k přísně reverzibilnímu popisu, zatím co příroda se chová ireversibilně .. (?...) …

Časový vývoj – entropia roste ……Entropia systému roste, dS/dt>0

1.4 Rovnice BBGKY

1.4 Rovnice BBGKY

Funkce $P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$ má určite vlastnosti plynoucí z jejího vztahu k částicím… Pomocí této funkce můžeme určit některé makroskopické veličiny charakterizující daný soubor částic v bodě r….

Např. proudová hustota v bodě r je daná vztahem

$$J(t,r) = \int J(r)\, P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^N\, dp^N \qquad (1.27)$$

kde $J(r)$ je operátor hustoty proudu

$$J(r) = \Sigma\, p_i \delta(r - r_i) \qquad (1.28)$$

Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$$

$$\hat{j}(r) = \Sigma\, e/\mu * p_i \delta(r - r_i)$$

operátor hustoty proudu (toku náboje)

Koncentrace částic $n(\boldsymbol{r}; t)$ v místě $\boldsymbol{r}$ je

$$n(\boldsymbol{r}; t) = \int \hat{n}(\boldsymbol{r})\, P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N , \qquad (1.29)$$

kde $\hat{n}(\boldsymbol{r})$ je operátor polohy

$$\hat{n}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) . \qquad (1.30)$$

Hustota kinetické energie $E(t; \boldsymbol{r})$ v místě $\boldsymbol{r}$ je rovna

$$E(t; \boldsymbol{r}) = \int \hat{E}(\boldsymbol{r})\, P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N , \qquad (1.31)$$

kde $\hat{E}(\boldsymbol{r})$ je operátor kinetické energie

$$\hat{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \qquad (1.32)$$

a m_i je hmotnost i-té částice.

Pro nabité částice je dále možno zavést proudovou hustotu $\boldsymbol{j}(t; \boldsymbol{r})$ v bodě $\boldsymbol{r}$ (hustotu toku náboje) vztahem

$$\boldsymbol{j}(t; \boldsymbol{r}) = \int \hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})\, P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N , \qquad (1.33)$$

kde $\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})$ je operátor hustoty proudu (toku náboje)

Úvod k BBGKY
(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

Z výše uvedených úvah plyne, že je vhodné zavést takové funkce a rovnice pro tyto funkce, které budou určovat chování s částic souboru ($s \ll N$). Definujme tedy pro $s \ll N$ funkci $F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)$ tímto způsobem:

$$F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = V^s P_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = \tag{1.38}$$

$$= V^s \int \ldots \int P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N$$

pro $s = 1, 2, 3, \ldots$

Z normovací podmínky

$$\frac{1}{V^s} \int \ldots \int F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_s = 1 \tag{1.39}$$

$V^{-s}F_s(t,r_1, \ldots\ldots r_s,p_1 \ldots p_s)$ je pravděpodobnost toho, že skupina **s** částic ze souboru **N** částic se bude v čase **t** nacházet v elementu $dr_1, \ldots\ldots dr_s, dp_1 \ldots dp_s$ bez ohledu na stav zbývajících (N-s) částic.

Pro interagující částice

- Trochu omezíme obecnost Hamiltonianu

(1.42) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} - [H; P_N] = 0 .$$

Hamiltonovu funkci H pro N vzájemně interagujících částic můžeme zapsat ve tvaru

(1.43) $$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m_i} + U_i(\boldsymbol{r}_i) \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^{N} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi_{ij} ,$$

kde $H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i)$ je hamiltonián samotné i-té částice a $U_i(\boldsymbol{r}_i)$ je potenciál, který je způsobený efekty na stěnách a vnějšími silami. $\Phi_{ij} = \Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ je interakční potenciál mezi i-tou a j-tou částicí.

Použitím rovnice (1.43) můžeme Liouvillovu rovnici (1.42) přepsat do tvaru

(1.44) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} [H_i; P_N] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} [\Phi_{ij}; P_N] = 0 .$$

Budeme-li dále násobit (1.44) V^s a integrovat s ohledem na $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N$ (přes fázový prostor $(N - s)$ částic), dostaneme

(1.45) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} V^s \int \ldots \int [H_i; P_N] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} V^s \int \ldots \int [\Phi_{ij}; P_N] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N ,$$

$V^{-s}F_s(t, r_1, \ldots\ldots r_s, p_1 \ldots p_s)$ je pravděpodobnost ….

BBGKY rovnice

- Po mnohých úpravách
- Po mnohých omezeních
- Po mnohých zjednodušeních

Budeme-li dále předpokládat, že pro $|\boldsymbol{r}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{r}_j) \to 0$ a pro $|\boldsymbol{p}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{p}_j) \to 0$, dostaneme integrací per partes relace

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí

kde

(1.53)
$$H_s = \sum_{i=1}^{s} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{s} \Phi_{ij}$$

je Hamiltonova funkce uzavřeného systému s částic.

S+1

F_s je funkci F_{s+1} → **soustava rovnic**

sme tam, kde sme boli !!

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \,. \tag{1.52}$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2) \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \tag{1.54}$$

a pro $s = 2$ dostaneme

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_3 \,. \tag{1.55}$$

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí
F_s je funkci F_{s+1}

Odvození Boltzmannový rovnice

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} .$$

$$\lim_{\substack{V\to\infty \\ N\to\infty}} \frac{V}{N} = v , \quad 0 < v < \infty ;$$

v je potom převrácená hodnota koncentace n, $v = 1/n$. Rovnice (1.52) má potom tvar*)

(1.56)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} .$$

Hledaní řešení B. rovnice

- Ve tvaru řady

v je potom převrácená hodnota koncentace n, $v = 1/n$. Rovnice (1.52) má potom tvar*)

(1.56) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} .$$

$v=1/n$

$nr_0^3<<1$

Sledujme tedy model klasického zředěného plynu, kdy $r_0^3/v \ll 1$, tj. interakční potenciál je krátkého dosahu a koncentrace částic je nízká. Naším dalším úkolem je výpočet funkce F_s. K tomuto účelu rozložme F_s do řady podle malého parametru r_0^3/v. Z rovnic (1.56) a (1.57) je zřejmé, že z formálního hlediska můžeme místo parametru r_0^3/v přijmout parametr $1/v$, aniž se změní obecnost daného postupu. Položme proto

(1.58) $$F_s = F_s^{(0)} + \frac{1}{v} F_s^{(1)} + \frac{1}{v^2} F_s^{(2)} + \ldots .$$

Dosadíme-li nyní daný rozklad do rovnice (1.56) a porovnáme-li členy obsahující stejné mocniny $1/v$, dostaneme

(1.59) $$\frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}] ,$$

(1.60) $$\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int [\sum_{i=1}^{s} \Phi_{i,s+1}; F_{s+1}^{(0)}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}$$

atd.

$F_s^{(0)}$

$F_s^{(1)}$

$F_s^{(2)}$

Máme tedy rovnice typu

(1.61) $$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = [H_s; \Phi(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)] + f(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) .$$

2. Vzájemné působení částic

- Rozebereme pružné srážky
- Srážky e- neutrál, e- ion, e-e.....

Už máme rovnice

(1.59) $$\frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}],$$

(1.60) $$\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int [\sum_{i=1}^{s} \Phi_{i,s+1}; F_{s+1}^{(0)}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}$$

atd.

$F_s^{(0)}$

$F_s^{(1)}$

....co potřebujeme je znalost interakce částic….

Elementární procesy v jiném pojetí

Vzájemné působení částic

- Zákony zachování

Sila kterou působí částice 2 na částici 1 je $\mathbf{F}_{12}$

$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ **2.1**

budeme předpokládat, že síly klesají dostatečně rychle s **r**

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu ,$$

Laboratorní a těžiskový systém

Pohyb každé z těchto částic je ve shodě s Newtonovými rovnicemi, tj.

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12}$$
$$m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21} .$$

Těžiště systému dvou částic $\boldsymbol{r}_c$ je nyní určeno rovnicí

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \mu_1 \boldsymbol{r}_1 + \mu_2 \boldsymbol{r}_2 ,$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} , \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} , \quad \mu_1 + \mu_2 = 1 .$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_c = \mu_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 + \mu_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 .$$

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_c = \text{konst} = \boldsymbol{v}_c .$$

$$\boldsymbol{\varrho}_1(t) = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_c ,$$
$$\boldsymbol{\varrho}_2(t) = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_c .$$

Těžiště soustavy dvou částic
se pohybuje konstantní rychlostí během celého srážkového procesu

Pohyb fiktivní částice

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_{21}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{F}_{21}\,.$$

- Pohyb v rovině

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ, která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1. S polohou těžiště

Ukážeme si dále, že daný pohyb je pohybem rovinným. K tomuto účelu násobme (2.25) vektorově vektorem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Dostáváme

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \frac{\mathrm{d}^2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{F}_{21} \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,. \tag{2.26}$$

Protože ale vzájemné působící síly jsou centrální, je pravá strana (2.26) rovna nule. Po kratších úpravách je potom možno (2.26) přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = 0\,, \tag{2.27}$$

odkud dostáváme, že

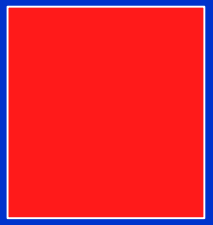
$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{k}\,, \tag{2.28}$$

kde $\boldsymbol{k}$ je konstantní vektor (je určen z počátečních podmínek našeho problému). To ale znamená, že vektor $\boldsymbol{r}$ i vzájemná rychlost částic leží stále v jedné rovině a tedy námi vyšetřovaný vzájemný pohyb částic je skutečně rovinný.

3.1 Základní úvahy

Předpokládejme pro jednoduchost, že máme systém N identických částic, z nichž žádná nemá vnitřní stupeň volnosti. Mechanický stav jedné částice bude potom charakterizován třemi prostorovými souřadnicemi $\boldsymbol{r}$ a třemi složkami rychlosti $\boldsymbol{v}$; tedy bodem v šestirozměrném μ prostoru. Definujme nyní rozdělovací funkci $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$ následujícím způsobem: $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ nechť je pravděpodobný počet částic, které se nacházejí v objemovém elementu μ prostoru $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ v okolí bodu $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ v čase t, nebo jinými slovy, pravděpodobný počet částic, které se v čase t nacházejí v intervalu $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r})$ a $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v})$. Z definice $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t)$ je ihned zřejmé, že celkový počet částic bude dán výrazem

$$N = \iint f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,, \tag{3.1}$$



Rozdělovací funkce

$f(\vec{r},\vec{v},t)$

Počet částic se sour. r,v,t v drdv

$f(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{r}d\vec{v}$

$fd\vec{r}d\vec{v}$

$n(\vec{r},t)$

Koncentrace částic

$v_0(\vec{r},t)$

Střední rychlost částic

Tok veličiny
jednotkovou ploch. pohybující se rychl. v_0

$$\Psi = \overline{\psi} = \int \psi(\vec{V})\vec{V}fd\vec{V}$$

kde integrací se míní integrace přes celý rychlostní prostor a přes objem, ve kterém je daný systém uzavřen. Potom střední hodnota funkce $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ je dána výrazem

(3.2) $$\bar{g} = \frac{1}{N}\iint g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\, f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Podobně pro lokální střední hodnotu (střední hodnotu, která se může obecně měnit v prostoru od bodu k bodu) funkce $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ dostáváme

(3.3) $$\overline{g(\boldsymbol{r}, t)} = \frac{1}{n}\int g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\, f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} ,$$

kde

(3.4) $$n(\boldsymbol{r}, t) = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

je koncentrace částic v místě $\boldsymbol{r}$; $n(\boldsymbol{r}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je potom počet částic v objemu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r}$.*)

Pomocí definice (3.3) můžeme nyní zavést některé důležité veličiny, které budou pro nás v dalším textu nepostradatelné.

Tak například střední rychlost částic v bodě $(\boldsymbol{r}, t)$ $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ bude podle (3.3) dána vztahem

(3.5) $$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n}\int \boldsymbol{v}\, f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Velmi často bývá výhodné vztahovat rychlost částic ke střední rychlosti $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$; zavedeme tedy pojem relativní rychlosti $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke střední rychlosti $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ vztahem

(3.6) $$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) .$$

Potom s ohledem na definici $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ (3.5) je zřejmé, že

(3.7) $$\overline{\boldsymbol{V}} = \bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = 0 .$$

V systému, který není v rovnovážném stavu, existuje jistý počet gradientů, jako například koncentrace, relativní rychlosti, teploty atd., které způsobují přenos hmotnosti, impulsu, teploty a dalších veličin, jež charakterizují vlastnosti částic daného systému. Označíme-li tyto veličiny jako $\psi(\boldsymbol{v})$, pak tok veličiny ψ jednotkovou plochou, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ **) za jednotku času bude zřejmě roven

(3.8) $$\Psi = \bar{\psi} = \int \psi(\boldsymbol{V})\, \boldsymbol{V} f\, \mathrm{d}\boldsymbol{V} .$$

*) Pro jednoduchost zápisu budeme místo „v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r}$“ říkat „v bodě $\boldsymbol{r}$“.

**) V dalším textu budeme vždy uvažovat tok plochou, která je v klidu vzhledem ke střední rychlosti částic systému.

Odvození Boltzmannový rovnice

Velký Kracík

Odvození Boltzmannový rovnice

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$ působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i$ o velikosti $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + dt$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemo… entu $d\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i$ + … nitř $d\boldsymbol{r}$ za dt). Podle Lio…

$$G(A+X)-G(A)=X\Delta_A\Gamma$$

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\, dt, t + dt)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i .$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

(3.32) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas dt, musí zřejmě platit

(3.33) $$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\, dt, t + dt)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt .$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

(3.34) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} .$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas dt (označí-

(1.15′) $$\frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0 ,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$$\int d\Gamma = \int d\mathbf{r}^N d\mathbf{p}^N = \text{const},$$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina… proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\, d\boldsymbol{r}_{s+1}\, d\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

(1.54) $$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2$$

a pro $s = 2$ dostaneme

(1.55) $$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3]\, d\boldsymbol{r}_3\, d\boldsymbol{p}_3 .$$

Taylorova rada pre funkciu G

$$G(\vec{A}+\vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X}.\nabla_A G$$

Velký Kracík

Odvození Boltzmannový rovnice

$$(1.15') \qquad \frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0 ,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$\int d\Gamma = \int dr^N dp^N = const,$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina… proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$ působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i$ o velikosti $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + dt$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $d\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt$ a v rychlostním elementu $d\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\, dt$ (předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $d\boldsymbol{r}$ za dt). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\, dt, t + dt)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i .$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

$$(3.32) \qquad \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas dt, musí zřejmě platit

$$(3.33) \qquad f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\, dt, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\, dt, t + dt)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i\, dt .$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

$$(3.34) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} .$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas dt (označí-

74

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$(1.52) \qquad \frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N - s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\, d\boldsymbol{r}_{s+1}\, d\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

$$(1.54) \qquad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \frac{N - 1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2$$

a pro $s = 2$ dostaneme

$$(1.55) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N - 2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3]\, d\boldsymbol{r}_3\, d\boldsymbol{p}_3 .$$

Taylorova rada pre funkciu G

$$G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X} . \nabla_A G$$

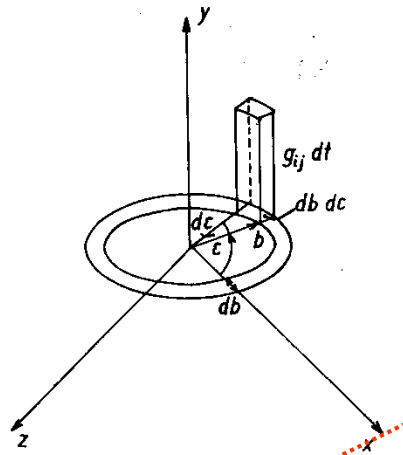
me $\sum_j A_{ij}^+ \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval dt (označíme $\sum_j A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$). Symbolicky tedy můžeme psát

(3.35) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = \sum_j \left(A_{ij}^+ - A_{ij}^- \right) d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \, ,$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\boldsymbol{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu dt srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $g_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas dt s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je g_{ij}, srážkový parametr je v mezích b, $b + db$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$



Obr. 3.1.

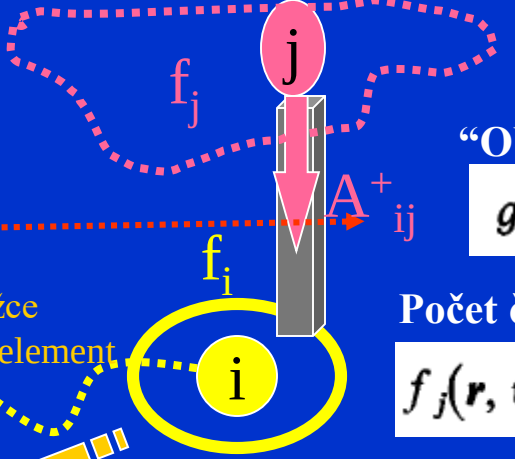
(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt \, .$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas dt potom zřejmě bude

(3.36) $$A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \, .$$

Velký Kracík



"Objemový" element

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Počet částic v elementu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Všecky takové **j-té** částice narazí do **i-té** částice v počátku

$$dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j$$

i-tych částice v elementu je:

$$f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i .$$

$d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i$, je $A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$

Počet srážek
= počet částic, které opustí element $d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{v}_i$ je :

Velký Kracík

Objemový element

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Počet částic v elementu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Všecky takové **j-té** částice narazi do **i-té** částice v počátku

$$dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j$$

i-tych částice v elementu je:

$$f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i .$$

$d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i$, je $A_{ij}^{-} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$

Počet srážek
= počet částic, které opustí element $drdv_i$ je :

$$A_{ij}^{-} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j$$

Podobně pro počet částic, které do elementu vejdou

Inverzní proces

před srážkou jsou $\boldsymbol{v}_i'$ a $\boldsymbol{v}_j'$

v důsledku srážky nabývají tyto částice

právě rychlostí $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v}_j$

$$A_{ij}^{+} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i' \, dt \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t) \, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t) \, g_{ij}' b' \, db' \, d\varepsilon' \, d\boldsymbol{v}_j'$$

$$\mathring{A}_{ij}^{-}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

$$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

Ze zákona zachování energie a impulsu (viz kapitolu 2) dále plyne, že

$$g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'$$

interakční potenciál částic je sféricky symetrický,

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

Protože částice neopustí během srážek objem $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}')$, dostáváme z platnosti Liouvillova teorému důležitý výsledek, že

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

Velký Kracik pokračování

$$A_{ij}^{-}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

$$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j' .$$

$g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'$

$\varepsilon = \varepsilon'$

$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

(3.42) $$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

Plný text

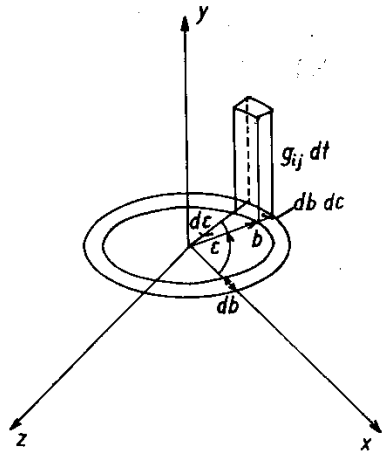
me $\sum_j A_{ij}^+ \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval $\mathrm{d}t$ (označíme $\sum_j A_{ij}^- \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$). Symbolicky tedy můžeme psát

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.35}$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^-\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\boldsymbol{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu $\mathrm{d}t$ srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $g_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas $\mathrm{d}t$ s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je g_{ij}, srážkový parametr je v mezích b, $b + \mathrm{d}b$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}t$$



Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}t\,.$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas $\mathrm{d}t$ potom zřejmě bude

$$\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,, \tag{3.36}$$

kde se integrování provádí přes b, ε a $\boldsymbol{v}_j$. Abychom zachytili celkový počet srážek všech částic i-tého druhu v objemu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$, je nutno (3.36) vynásobit počtem částic i-tého druhu, které se nacházejí v objemovém elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$, tj. je nutno (3.36) vynásobit výrazem $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$. Protože každá částice i-tého druhu, která se srazí s částicí j-tého druhu za $\mathrm{d}t$, opustí námi uvažovaný element $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$, je $A_{ij}^-\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$ rovno počtu srážek, tj.

$$A_{ij}^-\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,. \tag{3.37}$$

Obdobným způsobem můžeme stanovit $A_j^+\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$, tj. počet částic i-tého druhu, které se vlivem srážek s částicemi j-tého druhu dostanou za $\mathrm{d}t$ do námi uvažovaného objemu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$. V tomto případě stačí uvažovat takové inverzní srážky mezi částicemi i-tého druhu a částicemi j-tého druhu, kdy rychlosti těchto částic před srážkou jsou $\boldsymbol{v}_i'$ a $\boldsymbol{v}_j'$ a kdy v důsledku srážky nabývají tyto částice právě rychlostí $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v}_j$ (předpokládáme, že se srážkové podmínky oproti předcházejícímu případu nezmění). Potom úplně analogicky s (3.37) je počet takových srážek roven

$$A_{ij}^+\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,. \tag{3.38}$$

Ze zákona zachování energie a impulsu (viz kapitolu 2) dále plyne, že

$$g_{ij} = g_{ij}'\,, \quad b = b'\,. \tag{3.39}$$

Budeme-li dále předpokládat, že interakční potenciál částic je sféricky symetrický, můžeme položit

$$\varepsilon = \varepsilon'\,. \tag{3.40}$$

Protože částice neopustí během srážek objem $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}')$, dostáváme z platnosti Liouvillova teorému důležitý výsledek, že

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,. \tag{3.41}$$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

$$A_{ij}^+\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,. \tag{3.42}$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \tag{3.43}$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

Srážkový člen

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

(3.53)
$$n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$
$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$
$$+ \sum_{j \neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

(3.54)
$$\iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

(3.55)
$$\iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b' \, \mathrm{d}b' \, \mathrm{d}\varepsilon' \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j' \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' \,,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

Ukážeme, že pro některé funkce -invarianty

$$\Psi = 1\,, \qquad \Theta = m\boldsymbol{v}\,, \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2\,,$$

Je

$$\iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

Detailně

Srážkový člen – odstrašující příklad

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

$$(3.53)\qquad n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j\neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$

$$+ \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

$$(3.55)\qquad \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' ,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice (3.39), (3.40) a (3.41), dostáváme z (3.54) a (3.55)

$$(3.56)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = -\iiiint \Phi_i' (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

Uvážíme-li nyní platnost (3.56) a identitu z (3.54), můžeme konečně psát, že

$$(3.57)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Pro první člen na pravé straně (3.53) můžeme napsat zcela analogickou rovnici, tj.

$$(3.58)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li $\boldsymbol{v}_i$ za $\boldsymbol{v}_i^{(1)}$, rovnice (3.58) se nezmění; můžeme potom psát

$$(3.59)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i^{(1)} - \Phi_i'^{(1)})(f_i'^{(1)} f_i' - f_i^{(1)} f_i)\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} .$$

Nyní sečtením (3.58) a (3.59) získáváme důležitý závěr, že

$$(3.60)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)})(f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

V případě, že $i \neq j$, budeme postupovat poněkud jiným způsobem. K tomuto účelu sestrojme výraz

$$(3.61)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

Srážkový člen – odstrašující příklad

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

$$(3.53)\qquad n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j\neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$

$$+ \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Částice stejného druhu

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

$$(3.55)\qquad \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' ,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

(3.39), (3.40) a (3.41), dostáváme z (3.54) a (3.55)

$$(3.56)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = -\iiiint \Phi_i' (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

Uvážíme-li nyní platnost (3.56) a identitu z (3.54), můžeme konečně psát, že

$$(3.57)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Pro první člen na pravé straně (3.53) můžeme napsat zcela analogickou rovnici, tj.

$$(3.58)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li $\boldsymbol{v}_i$ za $\boldsymbol{v}_i^{(1)}$, rovnice (3.58) se nezmění; můžeme potom psát

$$(3.59)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i^{(1)} - \Phi_i'^{(1)})(f_i'^{(1)} f_i' - f_i^{(1)} f_i)\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} .$$

Nyní sečtením (3.58) a (3.59) získáváme důležitý závěr, že

$$(3.60)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)})(f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Částice stejného druhu

V případě, že $i \neq j$, budeme postupovat poněkud jiným způsobem. K tomuto účelu sestrojme výraz

$$(3.61)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

výsledek

Když toto je = 0,

pak toto je = 0

Srážkový člen – odstrašující příklad ale ten výsledek

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

Výsledek

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

$$(3.53)\qquad n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_t \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j\neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$

$$+ \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

$$(3.55)\qquad \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' ,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

a Σ_i. Zde je nutno vzít v úvahu platnost rovnice (3.63), do které nyní za Φ_i dosadíme $\boldsymbol{\Theta}_i$ a Σ_i. Potom dostaneme

$$(3.68)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \boldsymbol{\Theta}_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

a

$$(3.69)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Sigma_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0 .$$

Obdobné výsledky získáme, přejdeme-li od proměnných $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}$, t k jejich ekvivalentům $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{r}$, t (respektive od $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{r}$, t k $\boldsymbol{V}_i$, $\boldsymbol{r}$, t). Forma srážkových invariantů (3.65) a (3.67) se nezmění, je nutná pouze ekvivalentní záměna $\boldsymbol{v}$ za $\boldsymbol{V}$ respektive $\boldsymbol{v}_i$ za $\boldsymbol{V}_i$.

na základě platnosti (3.57). Provedeme-li nyní záměnu i za j, je pravá strana (3.61) rovna také výrazu

$$(3.62)\qquad \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint (\Phi_j - \Phi_j')\,(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i ,$$

který za pomoci (3.61) dává závěrečný vztah, že

$$(3.63)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_i \sum_{j\neq i} \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_j - \Phi_i' - \Phi_j')\,(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Vrátíme-li se nyní k některým úvahám, které se týkají teorie binárních elastických srážek (viz kapitolu 2), vidíme, že existuje jistý počet funkcí Φ_i, pro které platí

$$(3.64)\qquad \delta\bar{\Phi}_i = 0 .$$

Tyto funkce se nazývají srážkové invarianty a budou zřejmě funkcemi hybnosti a energie částic, neboť tyto veličiny se během srážek zachovávají. Jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), můžeme přijmout $\Phi_i = 1$, což nám vlastně vyjadřuje podmínku, že během srážky částice neopouští objemový element $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Protože během binárních srážek platí zákon zachování hmoty, můžeme také jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), přijmout $\Phi_i = m_i$, což je v podstatě úplně ekvivalentní $\Phi_i = 1$.

Jestliže je systém tvořen stejnými částicemi, máme pět srážkových invariantů

$$(3.65)\qquad \Psi = 1 , \qquad \boldsymbol{\Theta} = m\boldsymbol{v} , \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2 ,$$

které, vzhledem k platnosti (3.60), splňují (3.64).

Poněkud jiná situace nastane, jestliže systém bude tvořen několika druhy částic. Zde musíme rozlišovat dva případy:

a) Jestliže $\Psi_i = 1$, potom podle rovnice (3.57) platí, že

$$(3.66)\qquad \iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

a tedy tento případ je úplně obdobný případu předchozímu.

b) Jestliže ale

$$(3.67)\qquad \boldsymbol{\Theta}_i = m_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{a} \quad \Sigma_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 ,$$

pak již není možno zobecnit (3.66) do té míry, že bychom nahradili Ψ_i funkcemi $\boldsymbol{\Theta}_i$

Gibbsův H-teorém MINULÚ PREDNÁŠKU

(1.17) $$S = -kH = -k\int P_N \ln P_N \, d\Gamma ,$$

kde k je Boltzmannova konstanta. Budeme se tedy dále zabývat studiem H-funkce definované vztahem

(1.18) $$H = \int P_N \ln P_N \, d\Gamma .$$

Pro systém neinteragujících a na sobě nezávislých částic je možno P_N zapsat do tvaru

(1.19) $$P_N = P_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1)\, P_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2) \ldots P_1(\boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_N) .$$

Dosadíme-li nyní (1.19) do (1.18) a zavedeme-li generickou rozdělovací funkci

$$f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1) = N\, P_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1) ,$$

dostaneme, že

(1.20) $$H = \int f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1) \ln f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1) \, d\boldsymbol{r}_1 \, d\boldsymbol{p}_1 - N \ln N .$$

V rovnovážném stavu je $f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1)$ totožné s kinetickou rozdělovací funkcí $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ a H-funkce statistické mechaniky (1.18) se potom redukuje na Boltzmannovu H-funkci

$$H = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) \ln f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{p} ,$$

která se liší od (1.20) pouze aditivní konstantou ($N \ln N$), což ovšem není podstatné.

Situace se poněkud změní, jestliže systém nebude v rovnovážném stavu. Totiž z (1.18) plyne, že

(1.21) $$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial P_N}{\partial t} (\ln P_N + 1) \, d\Gamma .$$

Uvážíme-li nyní platnost Liouvillovy rovnice (1.15′), můžeme psát, že

(1.22) $$\int \frac{\partial P_N}{\partial t} \ln P_N \, d\Gamma = -\int [H; P_N] \ln P_N \, d\Gamma = \int P_N [H; \ln P_N] \, d\Gamma =$$

$$= \int [H; P_N] \, d\Gamma = -\int \frac{\partial P_N}{\partial t} \, d\Gamma .$$

Spojením rovnic (1.21) a (1.22) dostáváme, že

(1.23) $$\frac{dH}{dt} = 0 ,$$

To znamená, že systém se časově nevyvíjí….. tj. nerovnovážný systém se nemůže nikdy dostat do stavu rovnovážného. Paradox- klasická mechanika vede k přísně reverzibilnímu popisu, zatím co příroda se chová ireversibilně …

A boli sme nešťastní

Boltzmannův H-teorém speciální případ

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$\nabla_r = 0, \quad \vec{F} = 0$$

3.4 Boltzmannův *H*-teorém

Na rozdíl od Liouvillovy rovnice vyhovuje Boltzmannova rovnice plně požadavku nevratnosti přírodních dějů; tj. entropie definované pomocí rozdělovací funkce, která je řešením Boltzmannovy rovnice (3.43), je rostoucí funkce času až do té doby, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu. Potom je entropie konstantní, na čase nezávislá.

Abychom si ukázali výše uvedenou vlastnost Boltzmannovy rovnice, uvažujme nejprve jednoduchý případ, kdy $\nabla_r = 0$, vnější síly jsou nulové a systém se skládá z jednoho druhu částic. Boltzmannova rovnice má nyní tvar

(3.70) $$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} .$$

Sestrojme dále funkcionál $H(t)$ podle definice

(3.71) $$H(t) = \int f(\boldsymbol{v}, t) \ln f(\boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Potom

(3.72) $$\frac{\partial H}{\partial t} = \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \iiint\!\!\iint (1 + \ln f)\, (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Tento výraz můžeme dále upravit podle (3.60); po kratších úpravách můžeme psát, že

(3.73) $$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{4} \iiint\!\!\iint \ln \left(\frac{f' f'^{(1)}}{f f^{(1)}} \right) (f' f^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Částice stejného druhu

Odtud již snadno vidíme, že integrand je vždy kladný a tedy $\partial H / \partial t$ je vždy záporné.

Sestrojme funkcionál

(3.60) $$\iiint\!\!\iint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{4} \iiint\!\!\iint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)})\, (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

Částice stejného druhu

A máme po paradoxu - entropia rastie

$$\delta H / \delta t \leq 0$$

Velký Kracík

$$\nabla_r = 0, \quad \vec{F} = 0$$

3.4 Boltzmannův *H*-teorém

Na rozdíl od Liouvillovy rovnice vyhovuje Boltzmannova rovnice plně požadavku nevratnosti přírodních dějů; tj. entropie definované pomocí rozdělovací funkce, která je řešením Boltzmannovy rovnice (3.43), je rostoucí funkce času až do té doby, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu. Potom je entropie konstantní, na čase nezávislá.

Abychom si ukázali výše uvedenou vlastnost Boltzmannovy rovnice, uvažujme nejprve jednoduchý případ, kdy $\nabla_r = 0$, vnější síly jsou nulové a systém se skládá z jednoho druhu částic. Boltzmannova rovnice má nyní tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} . \tag{3.70}$$

Sestrojme dále funkcionál $H(t)$ podle definice

$$H(t) = \int f(\boldsymbol{v}, t) \ln f(\boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} . \tag{3.71}$$

Potom

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \iiiint (1 + \ln f)\, (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} . \tag{3.72}$$

Tento výraz můžeme dále upravit podle (3.60); po kratších úpravách můžeme psát, že

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{4} \iiiint \ln \left(\frac{f' f'^{(1)}}{f f^{(1)}} \right) (f' f^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} . \tag{3.73}$$

Odtud již snadno vidíme, že integrand je vždy kladný a tedy $\partial H / \partial t$ je vždy záporné.

Rovnováha

$$\delta H / \delta t = 0$$

- Odvození Maxwelove rozdělovací funkce.

Dále $\partial H/\partial t = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže

(3.74) $$f' f'^{(1)} = f f^{(1)} .$$

Podle rovnice (3.70) je pak ale $\partial f/\partial t = 0$, a proto podmínka (3.74) odpovídá rovnovážnému stavu.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}v^{(1)}$$

Na základě rovnosti (3.74) můžeme nyní určit tvar rozdělovací funkce systému, který je v rovnováze. Podle (3.74) můžeme totiž psát

(3.75) $$\ln f' + \ln f'^{(1)} = \ln f + \ln f^{(1)} ,$$

tj. logaritmus rovnovážné rozdělovací funkce je srážkovým invariantem našeho systému. Podle našich předchozích úvah (viz str. 80) musí tedy být $\ln f$ lineární kombinací srážkových invariantů (3.65), tj.

$$\Psi = 1 , \qquad \boldsymbol{\Theta} = m\boldsymbol{v} , \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2 ,$$

(3.76) $$\ln f = a m + \boldsymbol{b} \cdot m\boldsymbol{v} + c\, \tfrac{1}{2} m v^2 ,$$

kde konstanty a, $\boldsymbol{b}$ a c závisí na celkovém počtu částic, celkovém impulsu a celkové energii systému. Abychom určili tyto konstanty, přepišme (3.76) do tvaru

(3.77) $$\ln f = \ln a_0 - c\, \tfrac{1}{2} m[(v_x - b_x/c)^2 + (v_y - b_y/c)^2 + (v_z - b_z/c)^2] .$$

Položíme-li nyní

(3.78) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{c} ,$$

dostaneme z (3.77), že

(3.79) $$f = a_0 \exp\left(-c\, \tfrac{1}{2} m V'^2\right) .$$

Z normovací podmínky (3.4) dále máme

(3.80) $$n = \int f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = a_0 \int \exp\left(-\frac{c}{2} m V'^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{V}' = a_0 \left(\frac{2\pi}{mc}\right)^{3/2} .$$

Podobně

(3.81) $$n\boldsymbol{v}_0 = \int \boldsymbol{v} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int \left(\boldsymbol{V}' + \frac{\boldsymbol{b}}{c}\right) f \, \mathrm{d}\boldsymbol{V}' = n \frac{\boldsymbol{b}}{c} ,$$

protože $\int \boldsymbol{V}' f \, \mathrm{d}\boldsymbol{V}' = 0$; můžeme tedy psát, že

(3.82) $$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{b}}{c}$$

a tedy

(3.83) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V} .$$

Maxwelova rozdělovací funkce

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f'f'^{(1)} - ff^{(1)})\, gb\, db\, d\varepsilon\, dv^{(1)}$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

Dále $\partial H/\partial t = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže

(3.74) $$f'f'^{(1)} = ff^{(1)} .$$

Podle rovnice (3.70) je pak ale $\partial f/\partial t = 0$, a proto podmínka (3.74) odpovídá rovnovážnému stavu.

Na základě rovnosti (3.74) můžeme nyní určit tvar rozdělovací funkce systému, který je v rovnováze. Podle (3.74) můžeme totiž psát

(3.75) $$\ln f' + \ln f'^{(1)} = \ln f + \ln f^{(1)} ,$$

tj. logaritmus rovnovážné rozdělovací funkce je srážkovým invariantem našeho systému. Podle našich předchozích úvah (viz str. 80) musí tedy být $\ln f$ lineární kombinací srážkových invariantů (3.65), tj.

(3.76) $$\ln f = a\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b} \,.\, m\boldsymbol{v} + c\,\tfrac{1}{2}mv^2 ,$$

kde konstanty a, $\boldsymbol{b}$ a c závisí na celkovém počtu částic, celkovém impulsu a celkové energii systému. Abychom určili tyto konstanty, přepišme (3.76) do tvaru

(3.77) $$\ln f = \ln a_0 - c\,\tfrac{1}{2}m[(v_x - b_x/c)^2 + (v_y - b_y/c)^2 + (v_z - b_z/c)^2] .$$

Položíme-li nyní

(3.78) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{c} ,$$

dostaneme z (3.77), že

(3.79) $$f = a_0 \exp\left(-c\,\tfrac{1}{2}mV'^2\right) .$$

Z normovací podmínky (3.4) dále máme

(3.80) $$n = \int f\, d\boldsymbol{v} = a_0 \int \exp\left(-\frac{c}{2}mV'^2\right) d\boldsymbol{V}' = a_0 \left(\frac{2\pi}{mc}\right)^{3/2} .$$

Podobně

(3.81) $$n\boldsymbol{v}_0 = \int \boldsymbol{v} f\, d\boldsymbol{v} = \int \left(\boldsymbol{V}' + \frac{\boldsymbol{b}}{c}\right) f\, d\boldsymbol{V}' = n\frac{\boldsymbol{b}}{c} ,$$

protože $\int \boldsymbol{V}' f\, d\boldsymbol{V}' = 0$; můžeme tedy psát, že

(3.82) $$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{b}}{c}$$

a tedy

(3.83) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V} .$$

(3.5) $$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n}\int \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, d\boldsymbol{v} .$$

(3.6) $$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) .$$

Dále podle (3.80) a (3.83) platí

(3.84) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \frac{m}{2n}\int V^2 f\, d\boldsymbol{v} = \frac{m}{2n}\, a_0 \int V^2 \exp\left(-\frac{c}{2}mV^2\right) d\boldsymbol{V} = \tfrac{3}{2}c^{-1} .$$

S ohledem na definici $\boldsymbol{V}$ (3.6) je ale zřejmé, že

(3.85) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \tfrac{3}{2}kT$$

a tedy

(3.86) $$c = \frac{1}{kT} ,$$

kde k je Boltzmannova konstanta a T kinetická teplota plynu. Spojením předchozích výsledků dostáváme nyní rozdělovací funkci f ve tvaru

(3.87) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) .$$

$\int f\, d\boldsymbol{v}$

Tato rozdělovací funkce se nazývá Maxwellovou rozdělovací funkcí a systém, jehož stav je takovouto funkcí popsán, se nazývá maxwellovský systém.

Podle obecné definice rozdělovací funkce je $f\, d\boldsymbol{v}$ počet částic v jednotkovém objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. V některých případech je ale vhodné znát počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu $V, V + dV$, tj. zajímáme se pouze o absolutní hodnotu rychlosti a ne o směr. Zavedením sférických souřadnic (V, ϑ, φ) snadno získáme, že

(3.88) $$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{V} = V^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dV$$

a odtud integrací přes ϑ a φ pak dostaneme, že počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží mezi V a $V + dV$, je dán vztahem

(3.89) $$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) dV .$$

Pomocí takto zapsaného rozdělení můžeme nyní snadno určit střední hodnotu nějaké fyzikální veličiny, která nezávisí na směru rychlosti.

Tak např.

(3.90) $$\overline{V} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty V^3 e^{-(mV^2/2kT)}\, dV = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$$

a podobně

(3.91) $$\overline{V^2} = \frac{3kT}{m} .$$

Střední hodnoty

Dále můžeme spočíst nejpravděpodobnější rychlost $\bar{V}_n$, tj. rychlost, pro kterou (3.89) dosahuje maxima. Snadno najdeme, že

(3.92) $$\bar{V}_n = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}.$$

Sledujme nyní, jak vypadá tlakový tenzor (viz str. 71) maxwellovského systému. Jak je možno snadno zjistit, všechny členy tenzoru (3.11), s výjimkou diagonálních, jsou nulové. Pro výpočet diagonálních členů stačí uvážit, že $\overline{V_x^2} = \overline{V_y^2} = \overline{V_z^2} = kT/m$. Potom dostaneme, že

(3.93) $$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = \tfrac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = p = nkT$$

a tedy

(3.94) $$\mathbf{p} = nkT\mathbf{I}.$$

Boltzmannův H-teorém obecně

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

Sledujme nyní obecnější případ systému stejných částic, kdy $\nabla_r \neq 0$ a $F \neq 0$. Pro jednoduchost předpokládejme, že vnější síly F nezávisí na rychlosti částic. Sestrojme nyní, stejně jako v kapitole 1, $\mathscr{H}$-funkci podle definice

(3.95) $$\mathscr{H} = \iint f \ln f \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}r .$$

Potom

(3.96) $$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}r =$$

$$= \iint \left\{ (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} - v \cdot \nabla_r (f \ln f) - \frac{F}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}v \, \mathrm{d}r .$$

Poslední dva členy pravé strany (3.96) při integraci vymizí (protože $\lim_{v \to \pm\infty} f \ln f = \lim_{r \to \pm\infty} f \ln f = 0$) a můžeme proto psát

(3.97) $$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}r .$$

To ale znamená (stejně jako v předchozím případě), že

(3.98) $$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} \leqq 0 ;$$

$$\delta H / \delta t \leq 0$$

(3.60) $$\iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) \, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}v_i^{(1)} \, \mathrm{d}v_i =$$

$$= \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)}) (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)}) \, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}v_i^{(1)} \, \mathrm{d}v_i$$

Maxwelova rozdělovací funkce

- Potenciálové pole

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

(3.99) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right),$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$.

Potom

(3.100) $$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

(3.101) $$v \,.\, \nabla_r f + \frac{F}{m} \,.\, \nabla_v f = 0 \,.$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

(3.102) $$v \,.\, \nabla_r\left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T} v \,.\, \nabla_r T - \frac{F}{kT} \,.\, v = 0 \,.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\nabla_r T = 0$$

a

(3.104) $$\nabla_r\left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0 \,.$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

(3.105) $$F = kT\,\nabla_r\left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ ($F = -\nabla_r \Phi$), pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

Rovnováha … to je strašne silné

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \,.\, \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \,.\, \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\varepsilon \,\mathrm{d}v_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

=0 =0

Rovnováha

To iba ukazuje, že to nemá vnútorný rozpor

rovnováha… termodynamická rovnováha ???

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right)$$

To všetko v rovnováhe

Tomu třeba rozumieť tak, aby sme to dokázali používať???

Boltzmannův H-teorém obecně

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

$$\delta H / \delta t \leq 0$$

Maxwelova rozdělovací funkce

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

(3.99) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right),$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$.

Potom

(3.100) $$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

(3.101) $$v \,.\, \nabla_r f + \frac{F}{m} \,.\, \nabla_v f = 0 \,.$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

(3.102) $$v \,.\, \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T}\, v \,.\, \nabla_r T - \frac{F}{kT} \,.\, v = 0 \,.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\nabla_r T = 0$$

a

(3.104) $$\nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0 \,.$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

(3.105) $$F = kT\,\nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ ($F = -\nabla_r \Phi$), pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

- Potenciálové pole

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

!!!!!!!

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right)$$

- f je normovaná k n !!!!

-f byla odvozená za předpokladu v_0=0!!!!

➔žádný makroskopický pohyb

Potenciál silového pole

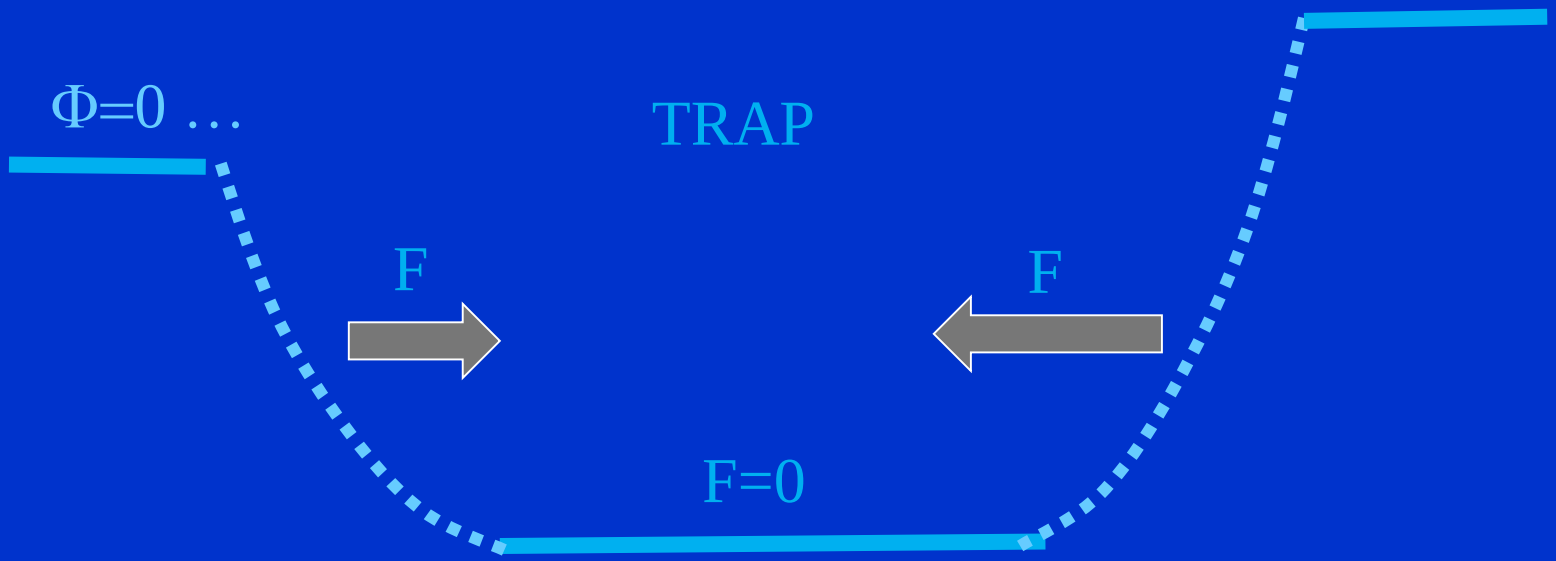
$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)$$

Maxwelova rozdělovací funkce

- Potenciálové pole

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$



Density of trapped particles

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp(-\frac{\Phi}{kT})$$

$$f = n_0 (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp(-\frac{\Phi}{kT}) \exp(-\frac{mv^2}{2kT}) \quad d\vec{v}$$

n(r)

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

Maxwelova rozdělovací funkce

- Potenciálové pole

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right) d\vec{v}$$

- f je normovaná k n

-f byla odvozená za předpokladu $v_0=0$ ➔žádny makroskopický pohyb

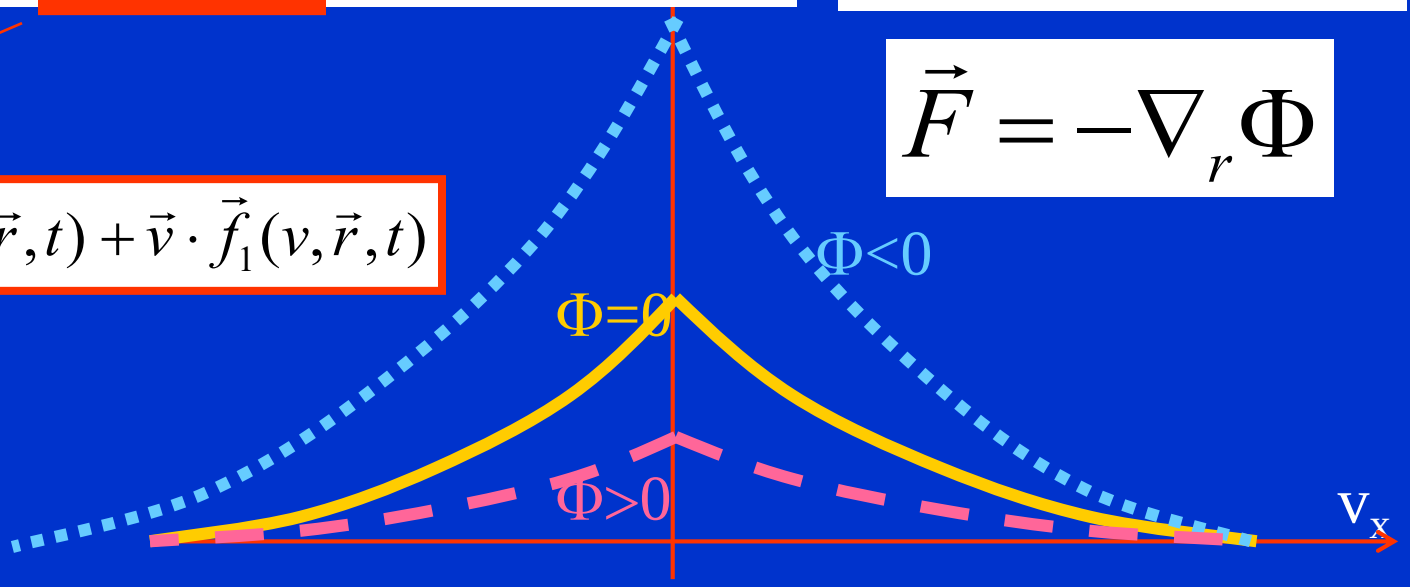
$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad d\vec{v}$$

n(r)

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right)$$

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$



Příklad FALP

- Shrňte, co se od účastníků očekává.
- POROZUMĚT PROBLÉM

(3.102) $$\boldsymbol{v} \cdot \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) + \frac{m}{2kT} \frac{v^2}{T} \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r T - \frac{\boldsymbol{F}}{kT} \cdot \boldsymbol{v} = 0 .$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\nabla_r T = 0$$

a

(3.104) $$\nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) - \frac{\boldsymbol{F}}{kT} = 0 .$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

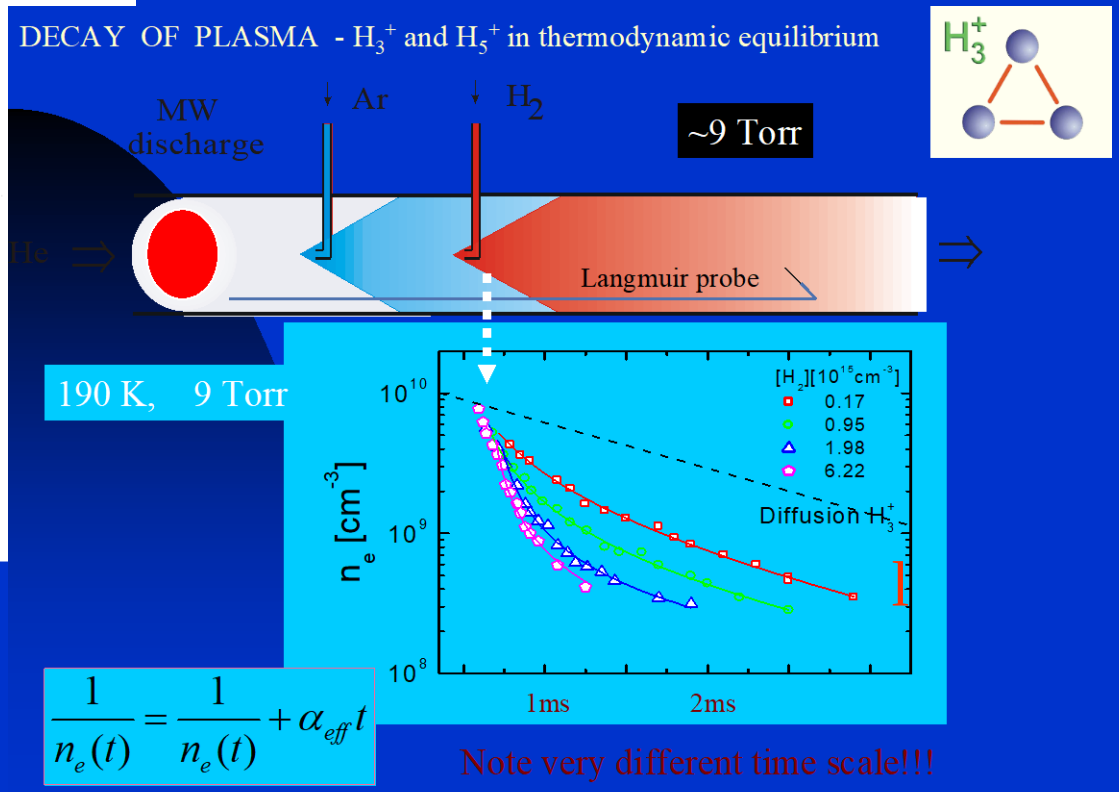
(3.105) $$\boldsymbol{F} = kT \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}} \right) .$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ $(\boldsymbol{F} = -\nabla_r \Phi)$, pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

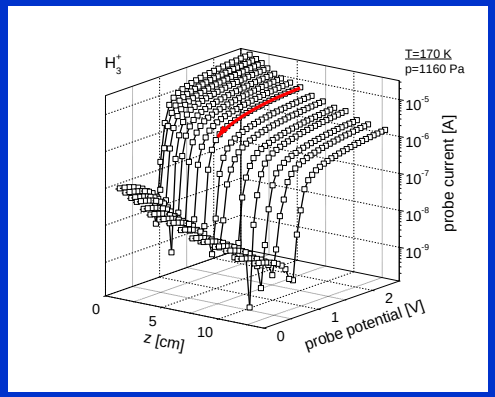
a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$n = n_0 \exp \left(-\frac{\Phi}{kT} \right),$$



Plasma parameters along the flow tube

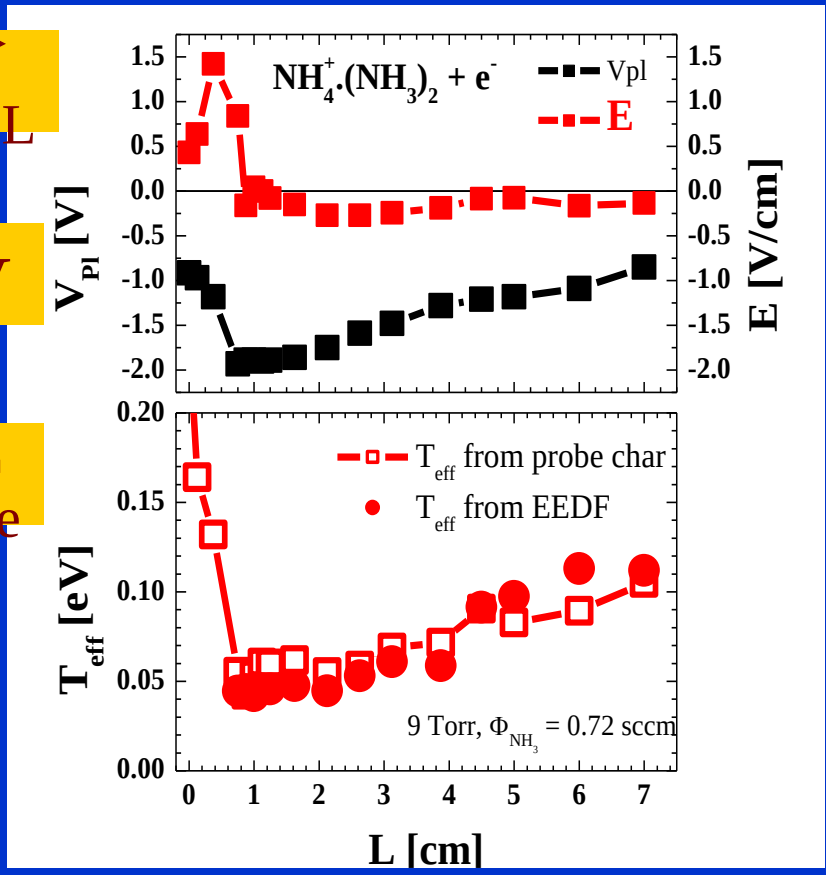
$NH_4^+(NH_3)_2 + e^-$



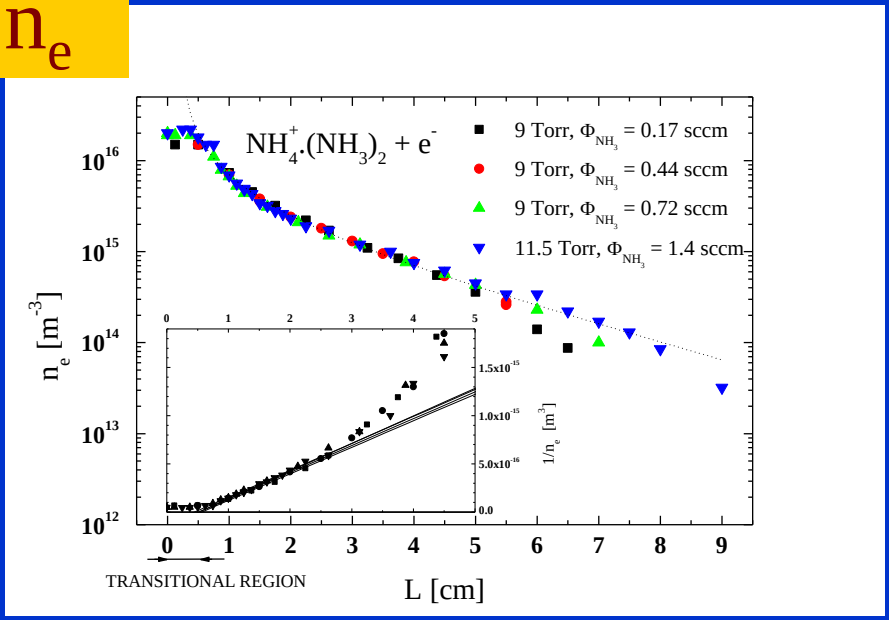
$\vec{E}_L$

V

T_e

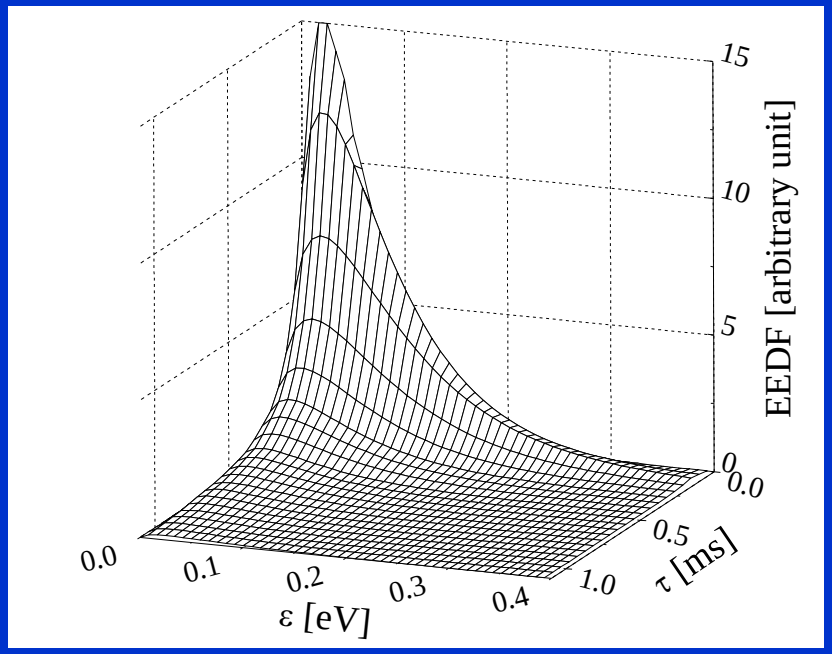


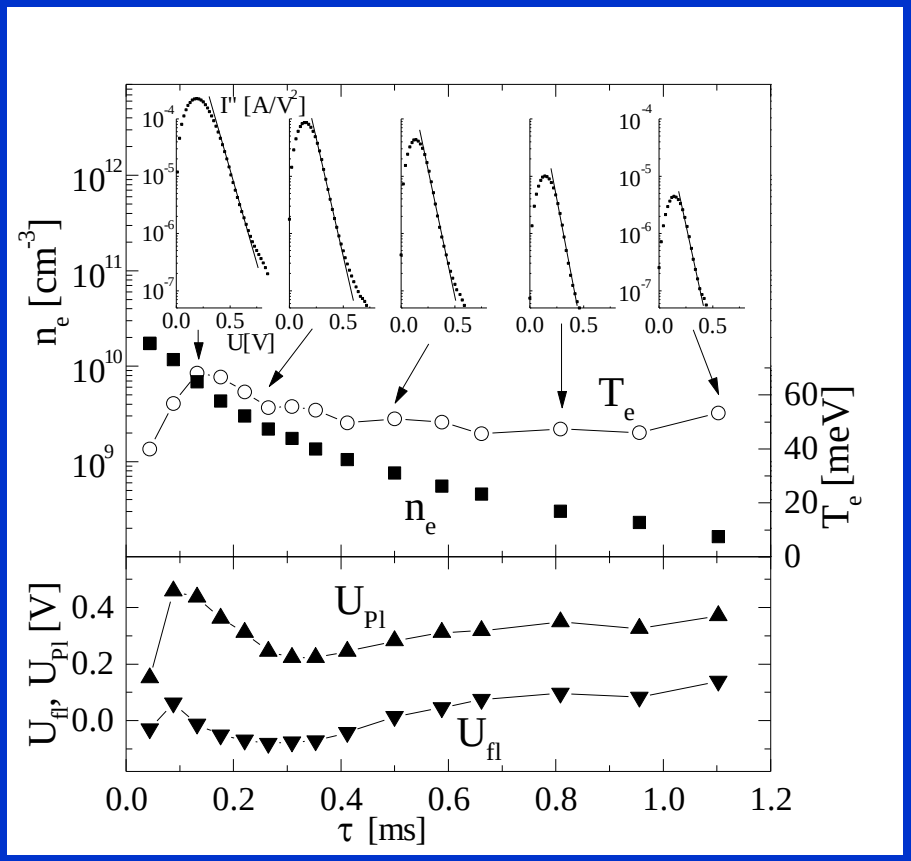
n_e

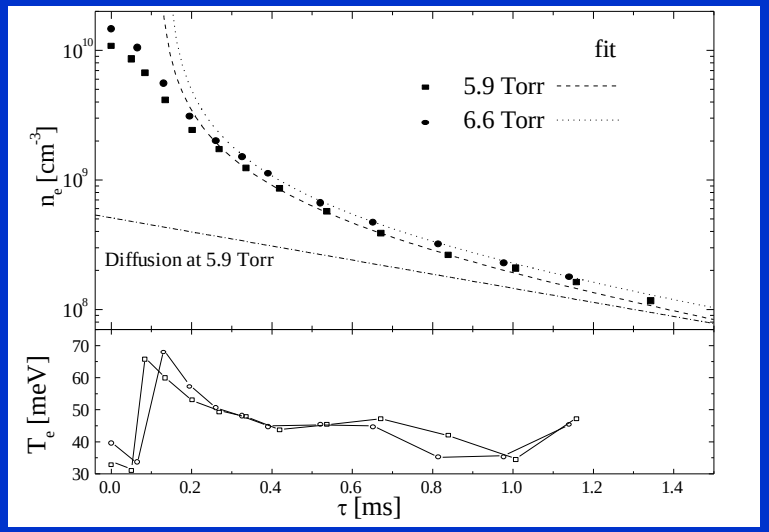


He buffer

EEDF measurements

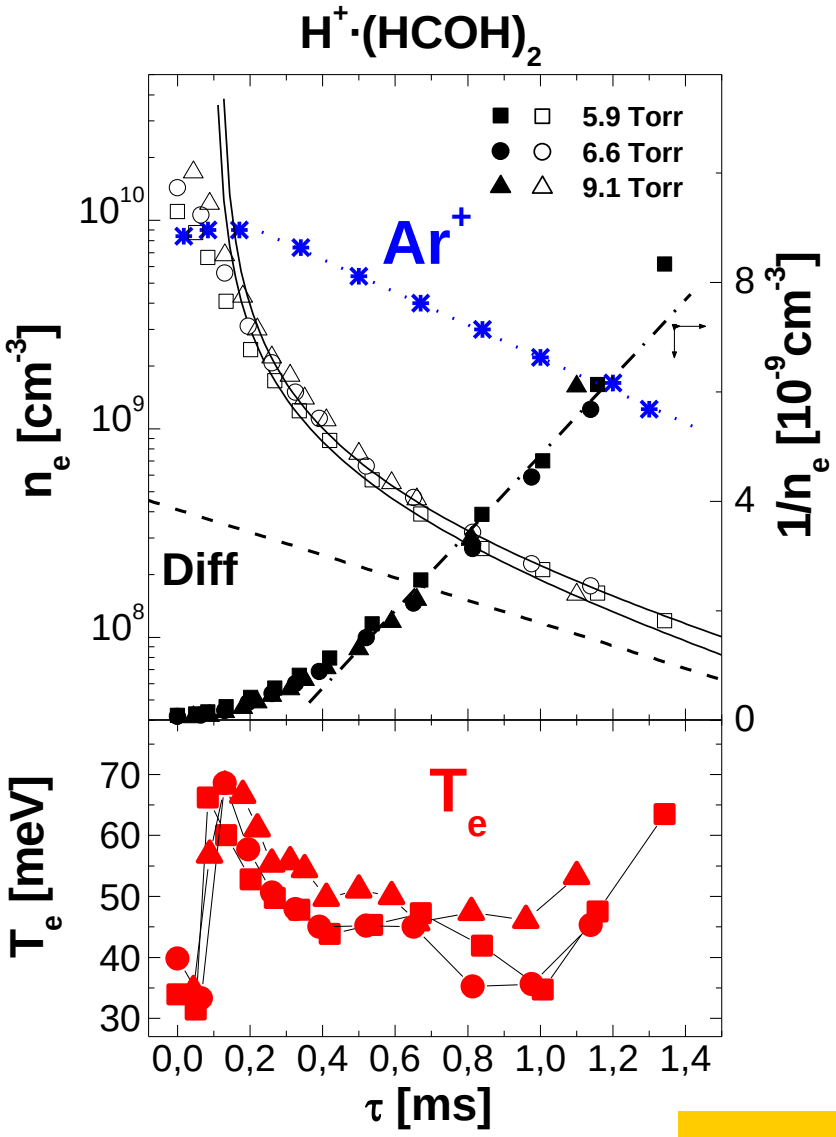


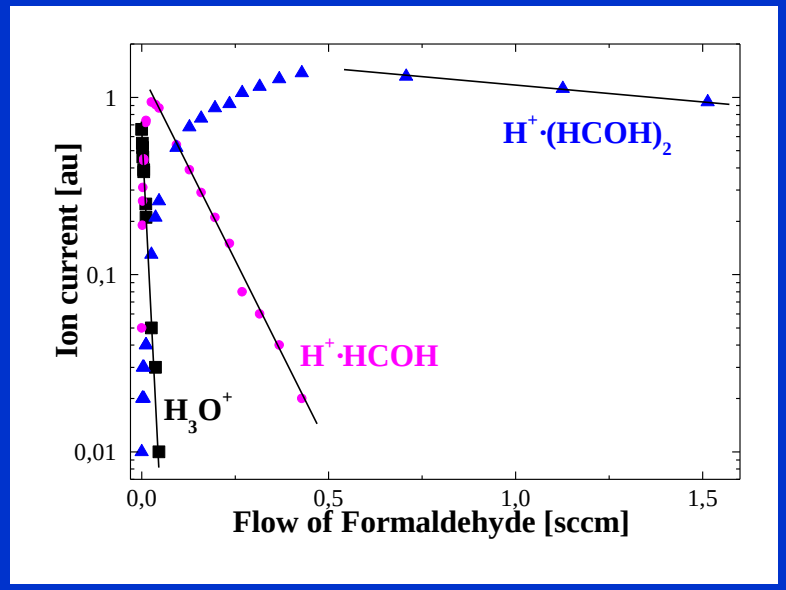


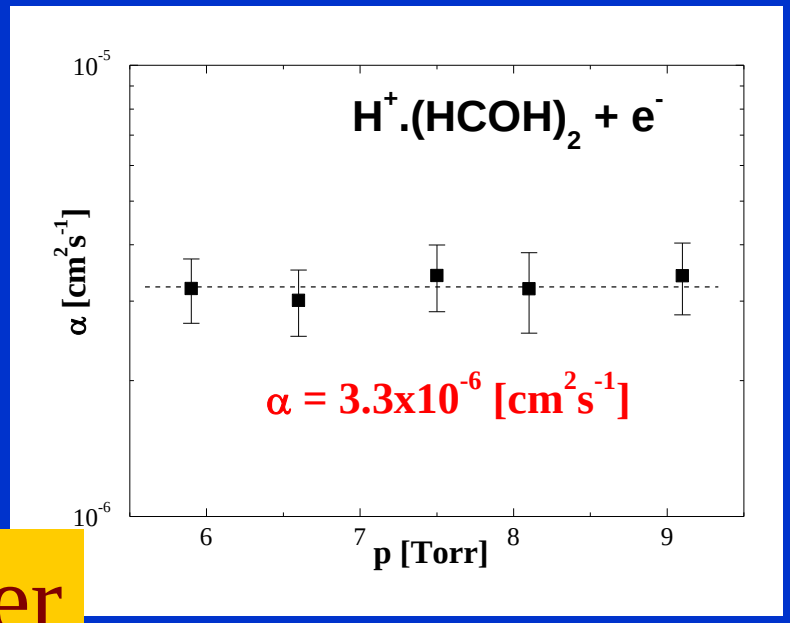


The time evolution of the EEDF in the recombination dominated FA plasma In He (p= 9 Torr) with small admixture of HCOH (0.05 %).
EEDF is normalized to the electron number density.

Recombination of $H^+(HCOH)_2 + e^-$

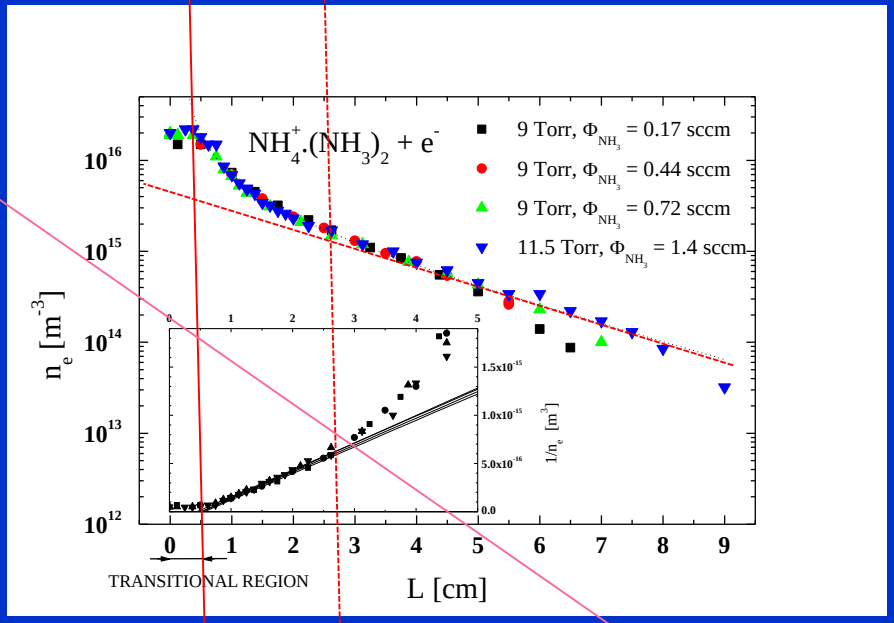


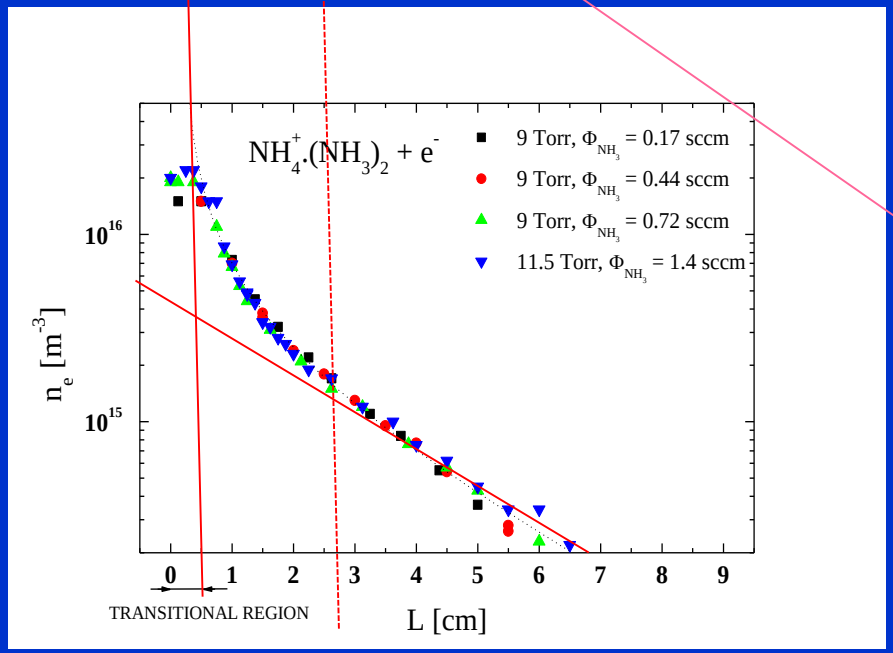




He buffer

Plasma parameters along the flow tube





Maxwelova rozdělovací funkce

■ Magnetické pole

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

Sledujme nyní, jak vypadá rovnovážný stav systému za přítomnosti magnetického pole. Jak jsme již uvedli, je síla, způsobená tímto polem, úměrná výrazu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. V rovnici (3.96) je poslední člen na pravé straně nyní nutno nahradit členem

$$(3.109) \qquad \iiint \left\{ -\frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) - \frac{q}{m} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Jak snadno zjistíme, je však tento integrál nulový; vyskytuje se zde integrál typu

$$(3.110) \qquad B_z \iiint v_y \frac{\partial}{\partial v_x} (f \ln f)\, \mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z = B_z \iint v_y [f \ln f]_{v_x = -\infty}^{v_x = +\infty} \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_x = 0$$

a tedy rovnice (3.98) a (3.99) se nemění. Protože dále platí $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0$, zůstává v platnosti i rovnice (3.102) a platí proto i další důsledky této rovnice.

Rozšíříme nyní naše úvahy na případ systému, který se skládá z několika druhů částic. Pro jednoduchost opět předpokládejme, že $\nabla_r = 0$ a vnější síly jsou nulové. Boltzmannova rovnice pro i-tý druh částic systému má pak tvar

$$(3.111) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

H-funkce systému je nyní definována rovnicí

$$(3.112) \qquad H(t) = \sum_i \int f_i(\boldsymbol{v}_i, t) \ln f_i(\boldsymbol{v}_i, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Potom

$$(3.113) \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \iiiint (1 + \ln f_i)(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i ;$$

tento výraz lze dále upravit za pomoci (3.63) tak, že

$$(3.114) \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} \iiiint \left(\ln \frac{f_i' f_j'}{f_i f_j} \right) (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

a tedy

$$(3.115) \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \leqq 0 .$$

$$(3.43) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$(3.96) \qquad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \iint \left\{ (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} - \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r (f \ln f) - \frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Poslední dva členy pravé strany (3.96) při integraci vymizí (protože $\lim_{v \to \pm\infty} f \ln f = \lim_{v \to \pm\infty} f \ln f = 0$) a můžeme proto psát

$$\delta H / \delta t = 0$$

V rovnovážném stavu je $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$ a stejným způsobem jako v předchozích případech zjistíme, že

$$(3.116) \qquad f_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i V^2}{2kT_i} \right),$$

kde $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0$.

Koniec rosprávky

REALITA všedných dní

Maxwellovy transportní rovnice – Rovnice přenosu

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

(3.117) $$\int \left\{ \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \right) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

(3.118) $$\int \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\Phi}_i) - n_i \left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

(3.119) $$\int \Phi_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \cdot \int \Phi_i \boldsymbol{v} f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i) f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i (\overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i})$$

atd.

Maxwellovy transportní rovnice – Rovnice přenosu

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

$$(3.117)\qquad \int\left\{\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i\right)\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

$$(3.118)\qquad \int \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = $$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(n_i \bar{\Phi}_i) - n_i \overline{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\right)},$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

$$(3.119)\qquad \int \Phi_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \cdot \int \Phi_i \boldsymbol{v} f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i) f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i \overline{(\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i)}$$

atd.

Položíme-li dále

$$(3.127)\qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla_r$$

a konečně třetí člen je možno upravit zcela analogicky, tj.

$$(3.120)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int \Phi_i \frac{\partial f_i}{\partial v_{ix}} \mathrm{d}v_{ix} \, \mathrm{d}v_{iy} \, \mathrm{d}v_{iz} + \ldots =$$

$$= \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int \frac{\partial}{\partial v_{ix}} (\Phi_i f_i) \, \mathrm{d}v_{ix} \, \mathrm{d}v_{iy} \, \mathrm{d}v_{iz} - \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial v_{ix}} \mathrm{d}v_{ix} \, \mathrm{d}v_{iy} \, \mathrm{d}v_{iz} + \ldots ;$$

protože $\lim_{v_i \to \pm\infty} (\Phi_i f_i) = 0$, je možno dále psát

$$(3.121)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -\int \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -n_i \overline{\left(\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i\right)}.$$

Jestliže $\boldsymbol{F}_i$ nezávisí na rychlosti, je možno $\boldsymbol{F}_i/m_i$ vyjmout před integrál a (3.121) má pak tvar

$$(3.122)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -n_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot (\overline{\nabla_v \Phi_i}) .$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\qquad \frac{\partial (n_i \bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i \left[\overline{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\right)} + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i} + \delta \bar{\Phi}_i\right] = 0 .$$

Rovnice (3.123) je obecnou rovnicí přenosu pro danou veličinu Φ_i, nazývá se Maxwellovou transportní rovnicí. Sumací (3.123) přes všechny druhy částic daného systému pak dostaneme rovnici přenosu pro veličinu Φ celého systému.

Maxwellovy transportní rovnice – Zákony zachování

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\overline{\Phi_i})}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i\left[\overline{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\right)} + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i} + \delta\overline{\Phi}_i\right] = 0 .$$

Položíme-li dále

$$(3.127)\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla_r$$

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednočásticový systém*) a nechť funkce Φ je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

a) $\Phi = \Psi = 1$.

Potom $\overline{\Psi} = 1$, $\overline{\Psi \boldsymbol{V}} = \mathrm{D}\Psi/\mathrm{D}t = \nabla_r \Psi = \nabla_V \Psi = \delta\overline{\Psi} = 0$ a z (3.129) dostaneme

$$(3.131)\quad \frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + n\,\nabla_r \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0 .$$

S použitím (3.127) můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$(3.132)\quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n\boldsymbol{v}_0) = 0 ,$$

což je zákon zachování počtu částic. Položíme-li $\Psi = m$, dostaneme z (3.132) známou rovnici kontinuity

$$(3.133)\quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0 .$$

b) $\Phi = \boldsymbol{\Theta} = m\boldsymbol{V}$.

Potom $\overline{\boldsymbol{\Theta}} = \delta\overline{\boldsymbol{\Theta}} = \nabla_r \boldsymbol{\Theta} = \mathrm{D}\boldsymbol{\Theta}/\mathrm{D}t = 0$, $n\overline{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{V}} = \mathbf{p}$, $\nabla_V \boldsymbol{\Theta} = m\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jednotkový tenzor); rovnice (3.127) dává

$$(3.134)\quad \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{D}t} = n\overline{\boldsymbol{F}} - \nabla_r \cdot \mathbf{p} ,$$

což je zákon zachování hybnosti.

c) $\Phi = \Sigma = \frac{1}{2}mV^2$.

Potom $\mathrm{D}\Sigma/\mathrm{D}t = \nabla_r \Sigma = \delta\overline{\Sigma} = 0$, $\nabla_V \Sigma = m\boldsymbol{V}$, $n\overline{(\nabla_V \Sigma)\,\boldsymbol{V}} = p$, podle (3.16) $n\overline{\Sigma \boldsymbol{V}} = \boldsymbol{q}$; rovnici (3.129) lze nyní upravit na tvar

$$(3.135)\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(n\overline{\Sigma}) + n\overline{\Sigma}\,\nabla_r \cdot \boldsymbol{v}_0 + \nabla_r \cdot \boldsymbol{q} + \mathbf{p} : \nabla_r \boldsymbol{v}_0 - n\overline{\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}} = 0 .$$

Uvážíme-li nyní, že

$$(3.136)\quad \overline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})\,\boldsymbol{V}} = 0$$

platí i pro případ vnější síly typu (3.49), můžeme dále (s použitím rovnice kontinuity (3.131) přepsat rovnici (3.135) do tvaru

$$(3.137)\quad n\frac{\mathrm{D}\overline{\Sigma}}{\mathrm{D}t} = -(\mathbf{p} : \nabla_r \boldsymbol{v}_0 + \nabla_r \cdot \boldsymbol{q}) ,$$

což je zákon zachování energie.

Transportní rovnice pro plazma

Plazma,Předpoklady

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i v_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{v_i \cdot \nabla_r\Phi_i} + \overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i} \cdot \nabla_v\Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0 .$$

3.7 Úprava transportních rovnic pro plazma

Rovnice (3.188), (3.189), (3.191) a (3.192) platí obecně pro vícesložkové plazma. Jsou však velmi složité, a proto se k praktickému řešení konkrétních úloh příliš nehodí. Upravíme proto tyto rovnice na základě některých předpokladů na přijatelnější a známější tvar. Předpokládejme, že*):

a) Plazma je kvasineutrální, tj.

$$(3.194)\quad \sigma_e \sim 0 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{j} .$$

Prostorový náboj σ_e můžeme zanedbat v pohybové rovnici (3.187) resp. (3.188) a v rovnici pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (3.189). σ_e však není možno zanedbat v Poissonově rovnici.

b) Hmotnost elektronů m_e je mnohem menší ve srovnání s hmotností iontů m_i, tj.

$$(3.195)\quad \frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad \text{a také} \quad \frac{Z_i m_e}{m_i} \ll 1 .$$

c) Plazma je téměř izotropní a $\boldsymbol{v}_0$ je dostatečně malé, tj. elektrický proud $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_0$ a tlakové gradienty jsou poruchy prvního řádu a proto členy, obsahující tyto veličiny ve druhé mocnině, stejně tak jako gradienty $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v}_0$ můžeme zanedbat.

d) Plazma není daleko od termodynamické rovnováhy, tj. parciální tlaky elektronu $\mathbf{p}_e$ a iontů $\mathbf{p}_i$ jsou téhož řádu; podle b) pak také platí

$$(3.196)\quad \frac{Z_i m_e}{m_i}\mathbf{p}_i \ll \mathbf{p}_e ,$$

což znamená, že elektrokinetický tenzor iontů je zanedbatelný ve srovnání s elektrokinetickým tenzorem elektronů.

e) Tenzor $\mathbf{p}$ nahradíme skalárním tlakem $p = p_e + p_i$.

f) Plazma je dvousložkové; je tvořeno elektrony a ionty.

Na základě těchto předpokladů můžeme dále psát, že

$$(3.197)\quad n_i Z_i \cong n_e = n$$

$$(3.198)\quad \varrho = m_e n_e + m_i n_i \sim \varrho_i ,$$

$$(3.199)\quad \boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{\varrho}(\varrho_i\bar{\boldsymbol{v}}_i + \varrho_e\bar{\boldsymbol{v}}_e) \cong \bar{\boldsymbol{v}}_i .$$

Dále

$$(3.200)\quad \boldsymbol{j} = Z_i e n_i \overline{\boldsymbol{V}_i} - e n_e \overline{\boldsymbol{V}_e} \cong Z_i e n_i \bar{\boldsymbol{v}}_i - e n_e \bar{\boldsymbol{v}}_e ;$$

potom

$$(3.201)\quad n_e\bar{\boldsymbol{v}}_e = Z_i n_i \bar{\boldsymbol{v}}_i - \frac{\boldsymbol{j}}{e} \cong \frac{Z_i}{m_i}\varrho\boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{j}}{e} .$$

Na základě výše uvedených předpokladů můžeme psát:

a) Pro jednotlivé složky plazmatu:

1) Rovnici kontinuity

$$(3.202)\quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{m_i}\nabla_r \cdot (\varrho\boldsymbol{v}_0) = 0 ,$$

$$(3.203)\quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i}\nabla_r \cdot (\varrho\boldsymbol{v}_0) + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

$$(3.204)\quad \nabla_r \cdot (\varrho\boldsymbol{v}_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

$$(3.203')\quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 .$$

Transportní rovnice pro plazma

- Plazma,Předpoklady

(3.203) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i} \nabla_r . (\varrho v_0) + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

(3.204) $$\nabla_r . (\varrho v_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

(3.203′) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

(3.205) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) ,$$

(3.206) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + v_e \times B) - n_e F_e = n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) .$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen $n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i)$, resp. $n_e \delta_i(m_e V_e)$. Podle (3.158) ale platí

(3.207) $$n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) + n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = 0 , \quad \text{tj.}$$
$$n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i)$$

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

V některých případech je možno předpokládat, že*)

(3.208) $$n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = - n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\overline{V}_e - \overline{V}_i) = - \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

(3.205′) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

(3.206′) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = - \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) .$$

REALITA všedných dní

Rutherfordova formule

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}$$

- Rutherfordova formule
- Experiment.

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu $\sigma(\chi)$ pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro $\sigma(\chi)$ je dán vztahem (2.79), tj.

(2.113) $$\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|.$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

(2.114) $$\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{1}{2}\frac{b^2}{b_0}\frac{1}{\cos^2\frac{\chi}{2}}$$

a

(2.115) $$b = b_0 \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2}.$$

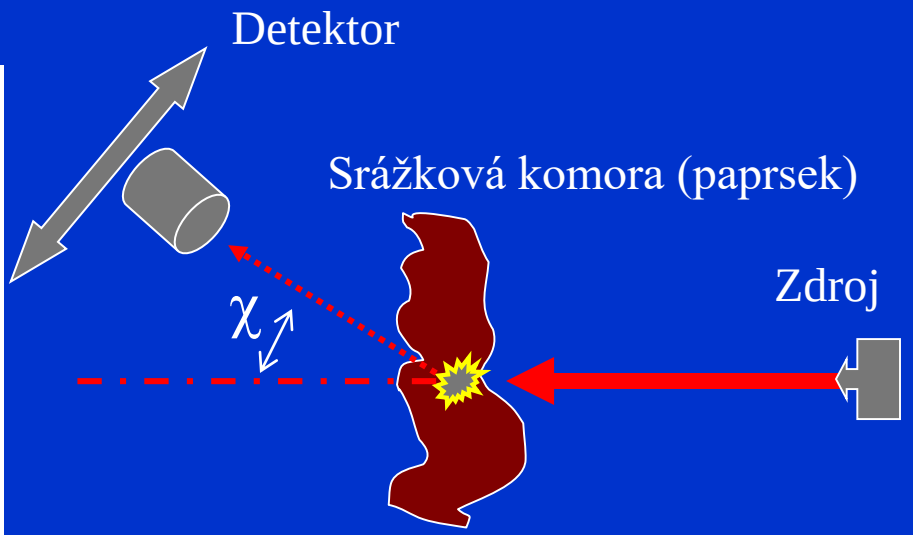
Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro $\sigma(\chi)$ ve tvaru

(2.116) $$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4}\frac{1}{\sin^4\frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \mu^2 g^4}\frac{1}{4\sin^4\frac{\chi}{2}}.$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.*)

Z (2.116) je zřejmé, že $\sigma(\chi)$ nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpudivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantovaja mechanika. op. cit.



Problém je s určením σ_c
Problém srážek na velkou vzdálenost

$$\sigma_c(v) = \int\sigma(\chi)\, d\Omega = 2\pi\int\sigma(\chi)\sin\chi\, d\chi = 2\pi\int b\, db$$

Debyeho stínící vzdálenost

- Shrňte, co se od účastníků očekává – pochopit, co je plazma.

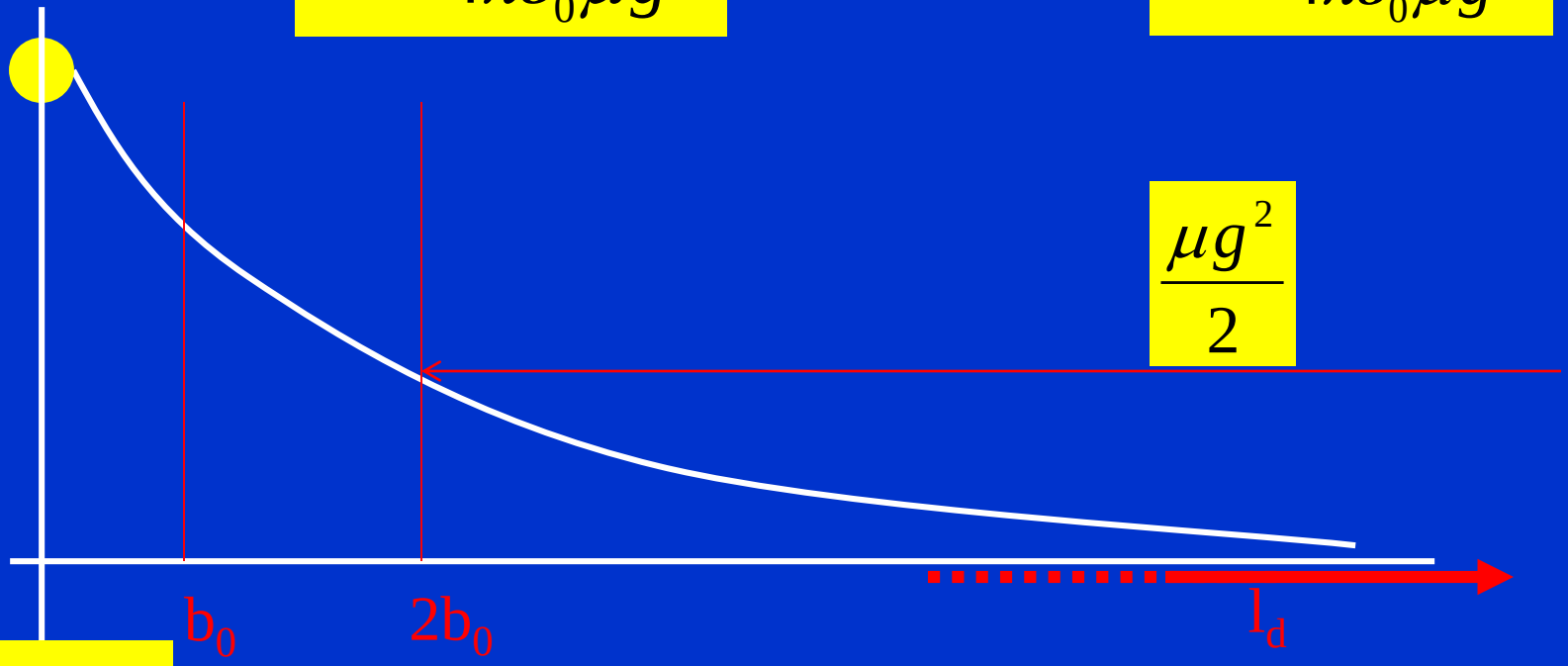
$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T_1 T_2}{e^2 (Z_1^2 n_{10} T_2 + Z_2^2 n_{20} T_1)}$$

For quasineutral plasma,
$n_{10} = n_{20} = n/2 =$ with $T_1 = T_2$ we obtain

$$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 k T}{n e^2}$$

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}$$

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}$$

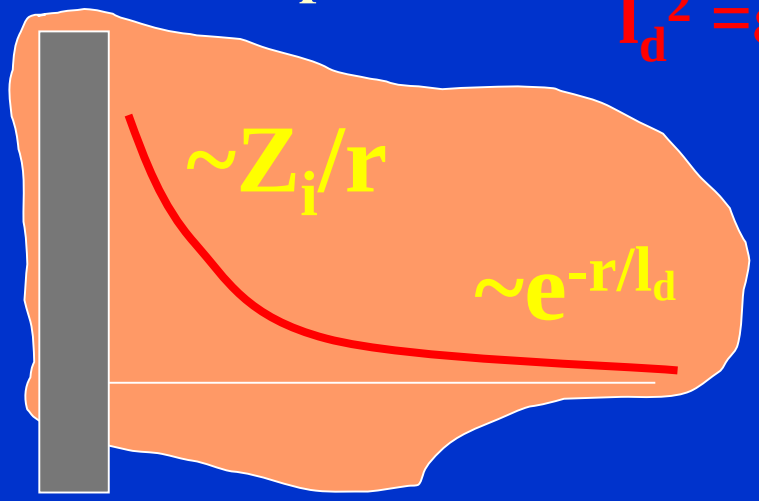


$$\frac{b_0}{l_d} = \frac{\frac{1}{9}(\frac{3}{2}kT)}{N\frac{1}{2}\mu g^2} <<< 1$$

Stínění v plazmě

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění

$$l_d^2 = \varepsilon_0 kT/ne^2$$



$v^2 \sim kT/m_e$

$$l_d^2 = kT/m_e * 1/\omega_{0e}^2 = v^2/\omega_{0e}^2$$

$$\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r \; * e^{-r/ld}$$

$$\sigma_c(v) = 2\pi \int b \, db$$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Tvar l_d (2.124) se značně zjednoduší, budeme-li předpokládat, že $Z_1^2 = Z_2^2 = 1$, $T_1 = T_2 = T$ a

(2.130) $$n_{10} + n_{20} = n, \qquad n_{10} \sim n_{20} \sim \tfrac{1}{2}n,$$

kde n je celkový počet částic v jednotce objemu. Potom, jak plyne z (2.124), je

(2.131) $$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}.$$

Uvážíme-li nyní, že Langmuirova frekvence (plazmová frekvence) ω_0 je dána výrazem

(2.132) $$\omega_0^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \sim \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e} = \omega_{0e}^2,$$

kde m_e je hmotnost elektronů a ω_{0e} je plazmová frekvence elektronů, můžeme také psát, že

(2.133) $$l_d^2 = \frac{kT}{m_e}\frac{1}{\omega_{0e}^2}.$$

Fyzikální význam této rovnice je celkem jasný. Rovnice (2.133) totiž říká, že l_d je taková délka, o kterou se přemístí částice (elektron) za periodu plazmových kmitů. Potom doba τ_{st}, za kterou se ustanoví debyeovské stínění, je řádově

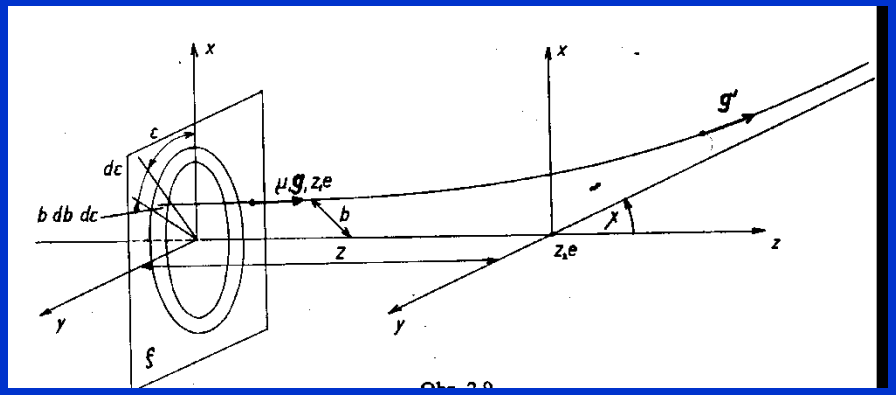
(2.134) $$\tau_{st} \sim \frac{1}{\omega_0} \sim \frac{l_d}{\sqrt{kT/m_e}}.$$

Na závěr tohoto odstavce je nutno poznamenat, že některé naše úvahy nejsou přesně vzato korektní. Týká se to především předpokladu, že rozložení částic kolem každého silového centra plazmatu je dáno sféricky symetrickým rozdělením Maxwella-Boltzmanna. Podrobnější analýza daného problému ukazuje*), že chyby, kterých se tímto jednoduchým popisem dopouštíme, jsou poměrně malé a navíc i tento jednoduchý popis vede k relativně dobrým výsledkům v další teorii plazmatu.

*) Viz např. D. V. Sivuchin: Voprosy těorii plazmy 4, red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).

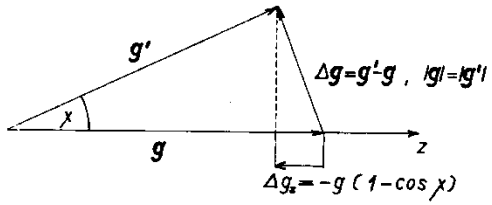
Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus



$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{(i)} p_{1i} = -\frac{g}{g}\mu\sum_{(i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_z\,,$$

kde suma přes i značí sečítání přes všechny částice svazku. Výraz $\sum_{(i)}(\mathrm{d}g_z/\mathrm{d}t)$ je možno celkem snadno určit: fyzikálně totiž znamená změnu relativní rychlosti svazku částic za jednotku času, nebo — což je totéž — změnu relativní rychlosti jedné částice svazku vlivem srážky, vynásobenou počtem srážek za jednotku času (předpokládáme, že interakci svazku můžeme rozdělit na jednotlivé binární srážky).



Obr. 2.10.

Změnu relativní rychlosti jedné částice svazku Δg_z určíme snadno z obr. 2.10. Snadno zjistíme, že

(2.136) $$\Delta g_z = -g(1-\cos\chi) = -2g\sin^2\frac{\chi}{2}.$$

Počet srážek za jednotku času závisí zřejmě na průřezu svazku; za jednotku času „dosáhnou" silového centra pouze ty částice, jejichž vzdálenost $Z \leqq g \cdot 1$ sec. Počet částic, které projdou elementární plochou $b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon$ za jednotku času a „dosáhnou" silového centra, pak zřejmě bude

(2.137) $$g n_1 b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,,$$

kde n_1 je koncentrace částic svazku. Vynásobíme-li nyní (2.136) výrazem (2.137) a zintegrujeme-li výsledek přes celou rovinu ξ, dostaneme, že

(2.138) $$\sum_{(i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_z = \int_0^\infty \mathrm{d}b\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varepsilon\left(-2g\sin^2\frac{\chi}{2}g n_1 b\right)$$

a odtud

(2.139) $$F = \frac{g}{g}2g^2 n_1\mu\,2\pi\int_0^\infty b\sin^2\frac{\chi}{2}\,\mathrm{d}b\,.$$

Uvážíme-li nyní, že podle (2.106) $\mathrm{tg}\,\chi/2 = b_0/b$, můžeme dále psát, že

(2.140) $$F = \frac{g}{g}\mu\,4\pi n_1 g^2 b_0^2\int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2+b^2}\,.$$

Integrál

(2.141) $$L = \int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2+b^2}$$

Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus

$$F = \frac{g}{g}\,\mu\,4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}.$$

$$L = \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}$$

ln(E.kinetická/E.potenciální)
Ve vzdalenosti l_d

Už jsme ukázali, že platí….

$$b_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \qquad l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}$$

$$\frac{b_0}{l_d} = \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}kT\right)}{\mathrm{N}\,\frac{1}{2}\mu g^2} <<< 1$$

logaritmicky diverguje pro velké hodnoty parametru b. Abychom dostali pro F konečné hodnoty, musíme v L nějakým způsobem omezit horní integrační mez.

V předchozím odstavci jsme si ukázali, že efektivní interakční potenciál částic je řádově dosahu l_d; binární coulombovské srážky je pak možno uvažovat pouze pro srážkový parametr $b \leqq l_d$. Za horní integrační mez L je tedy možno zvolit l_d. Dostaneme

(2.142) $$L = \int_0^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln \sqrt{\left(\frac{b_0^2 + l_d^2}{b_0^2}\right)}.$$

Jestliže dále platí, že $l_d \gg |b_0|$, můžeme (2.142) přepsat do tvaru

(2.143) $$L = \ln\left(\frac{l_d}{|b_0|}\right) = \ln \frac{l_d}{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}},$$

kde jsme za b_0 dosadili (2.97) a síla F, určená rovnicí (2.140), má nyní tvar

(2.144) $$F = L \frac{g}{g^3} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{n_1}{\mu}.$$

Veličina L určená rovnicí (2.143) se nazývá coulombovský logaritmus.

Předpokládali jsme, že platí

(2.145) $$l_d \gg b_0.$$

Tato podmínka však plyne přímo z předpokladů (2.120), které mají platit pro libovolné r. Položme tedy $r = l_d$ a předpokládejme pro jednoduchost, že $Z_1 = Z_2 = 1$. Sečtením nerovností (2.120) ($\varphi(r)$ bereme v prvním přiblížení jako coulombovský) dostaneme

(2.146) $$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{l_d} \ll k(T_1 + T_2),$$

což je možno přepsat jako

(2.147) $$l_d \gg \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 k(T_1 + T_2)}.$$

Protože ale $3k(T_1 + T_2) \sim \mu g^2$, je možno (2.147) dále přepsat na

(2.148) $$l_d \gg \frac{6e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \sim b_0.$$

Odtud již vidíme, že nerovnost (2.145) je již splněna, platí-li (2.120), nebo jinými slovy, předpokládáme (stejně jako v 1. kapitole), že interakční energie částic je mnohem menší ve srovnání s jejich tepelnou energií. K tomuto výsledku je možno dojít ještě trochu jiným způsobem. Aby „ořezání“ integrálu L(2.141) mělo fyzikální smysl,

Další kroky

(2.140) $$F = \frac{g}{g}\,\mu\, 4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b\,db}{b_0^2 + b^2}.$$

Integrál

(2.141) $$L = \int_0^\infty \frac{b\,db}{b_0^2 + b^2}$$

(2.151) $$|F| = \text{konst}\, L,$$

kde L je dáno rovnicí (2.142), resp. (2.143). Sledujme dále, jak závisí $|F|$ na úhlu rozptylu částic. Na základě (2.106) můžeme tvrdit, že pro $b \gg b_0$ je

(2.152) $$\chi = \frac{2b_0}{b} \ll 1$$

a tedy rozptyl na malé úhly odpovídá dalekým průletům. Hranici mezi dalekými a blízkými průlety stanovme pro $b = 2b_0$. Rovnici (2.151) můžeme nyní psát ve tvaru

(2.153) $$|F| = \text{konst} \int_0^{l_d} \frac{b\,db}{b_0^2 + b^2} = \text{konst}\,(L_{\text{b.p.}} + L_{\text{d.p.}}),$$

kde

(2.154) $$L_{\text{b.p.}} = \int_0^{2b_0} \frac{b\,db}{b_0^2 + b^2} = \ln 3 \sim 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající blízkým průletům a

(2.155) $$L_{\text{d.p.}} = \int_{2b_0}^{l_d} \frac{b\,db}{b_0^2 + b^2} = \ln \frac{l_d}{b_0} - \ln 3 \sim \ln \frac{l_d}{b_0} = L \gg 1$$

je coulombovský logaritmus odpovídající dalekým průletům. Z (2.153) je zřejmé, že střední sílu, která působí na částici 2 ze strany svazku částic 1, můžeme rozdělit na dvě části a to na sílu $F_{\text{b.p.}}$, odpovídající blízkým průletům, a $F_{\text{d.p.}}$, odpovídající dalekým průletům; pro $F_{\text{b.p.}}$ a $F_{\text{d.p.}}$ platí

(2.156) $$|F_{\text{b.p.}}| \sim L_{\text{b.p.}}$$

$F_{dp} / F_{bp} \sim L >> 1$

Závislost na teplotě

V závěru tohoto odstavce uvedeme ještě několik poznámek, týkajících se coulombovského logaritmu L. Z (2.143) vidíme, že L závisí logaritmicky na μg^2. V důsledku této logaritmické závislosti je možno v mnoha případech nahradit μg^2 střední hodnotou této veličiny nebo tepelnou rychlostí částic, tj. můžeme položit $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$. Abychom si utvořili představu, jak závisí L na teplotě a koncentraci, předpokládejme pro jednoduchost, že $T_1 = T_2 = T$. Coulombovský logaritmus má pak jednoduchý tvar

$$L = \ln\left[\frac{12\pi}{n^{1/2}}\left(\frac{\varepsilon_0 kT}{e^2}\right)^{3/2}\right]. \tag{2.159}$$

V jednoduchém případě, kdy $\mu g^2 \sim \frac{3}{2}k(T_1 + T_2)$, $T_1 = T_2 = T$ a $|Z_1| = |Z_2| = 1$, je možno (2.161) přepsat na tvar

$$L_{kv} = L_{kl} + \ln\left(\frac{4{,}2 \cdot 10^5}{T}\right)^{1/2}, \tag{2.162}$$

kde L_{kl} je dáno vztahem (2.159). Hodnoty coulombovského logaritmu vypočtené z (2.159) a (2.161) jsou uvedeny v tab. 1; nejsou zde uvedeny hodnoty coulombovského logaritmu pro vysoké koncentrace a nízké teploty, protože v těchto případech je námi uvedená teorie neplatná.

Tabulka 1. Hodnoty coulombovského logaritmu L.

Koncentrace elektronů $[m^{-3}]$	Teplota K									
	50	100	5.10^2	10^3	5.10^3	10^4	5.10^4	10^5	5.10^5	10^6
10^{10}	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	21,05	22,09	24,42	25,11
10^{11}	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,88	20,94	23,26	23,96
10^{12}	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,75	19,79	22,11	22,81
10^{13}	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,60	18,63	20,96	21,65
10^{14}	6,08	7,12	9,54	10,58	12,99	14,03	16,44	17,48	19,81	20,50
10^{15}	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,29	16,33	18,66	19,36
10^{16}	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,14	15,18	17,51	18,20
10^{17}	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	19,99	14,03	16,36	17,05
10^{18}	—	—	4,93	5,97	8,39	9,42	11,84	12,88	15,21	15,90
10^{19}	—	—	—	4,82	7,23	8,27	10,69	11,73	14,06	14,75
10^{20}	—	—	—	—	6,08	7,12	9,54	10,58	12,90	13,60
10^{21}	—	—	—	—	4,93	9,57	8,39	9,42	11,75	12,45
10^{22}	—	—	—	—	—	4,92	7,23	8,27	10,60	11,30
10^{23}	—	—	—	—	—	—	6,08	7,12	9,45	10,14
10^{24}	—	—	—	—	—	—	4,93	5,97	8,30	8,99

Literatura ke kap. 2.

Jancel R., Kahan Th.: Electrodynamics of plasmas. J. Wiley & Sons, London (1966).
Delcroix J. L.: Plasma physics. J. Wiley & Sons, London (1965).
Landau L. D., Lifšic E. M.: Kvantovaja mechanika. Moskva (1963).
Sivuchin D. V.: Voprosy těorii plazmy *4.*, red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).
Trubnikov B. A.: Voprosy těorii plazmy *1.*, red. M. A. Leontovič, Moskva (1963).
Spitzer L.: Physics of fully ionized gases. Interscience, New York (1956) (ruský překlad Spitzer L.: Fizika polnosťju ionizovannogo gaza. Moskva (1965)).

Quo vadis domine nostra

- Shrňte, co se od účastníků očekává.
- Shrňte, co se očekává od vás.