Boltzmannova rovnice TZFP A2 - 2021

I am sorry for English, Czech and Slovak language … , ☺, ☺, ….

THIS IS THE FORMAT OF COMMENTS – additionally written to the lecture presented before KARANTENA

Lecture number TZFP A2 2021
Student version – standard lecture 08. 04. 2021

Recommended literature :

Literatura:

Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu
„Velký Kracík“
J.Kracík, B. Šesták a L. Aubrecht
Academia Praha 1974

Fyzika plazmatu
J.Kracík, J. Tobiáš
Academia, Praha 1966
„Malý Kracík“

pdf copy of “Velky Kracik” is available on request from lecturer

Lecture number TZFP A2 2021
Student version – standard lecture 08. 04. 2021

Corresponding text in “Velky Kracik” is up to pp. 68

Charles University Prague
Mathematics and Physics Faculty

Partly from FP I L 2B

Electron collisions

Collision Cross section

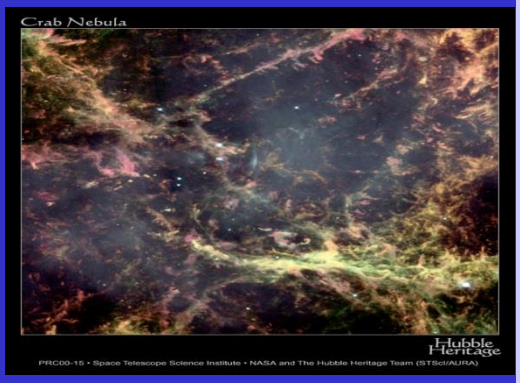
Collision rate coefficient

Reaction Cross section

Reaction rate coefficient

Juraj Glosík

Temperatures and potential energies



E/k←→T
1eV ~ 11 400 K
1K ~ 9x10^{-5}eV

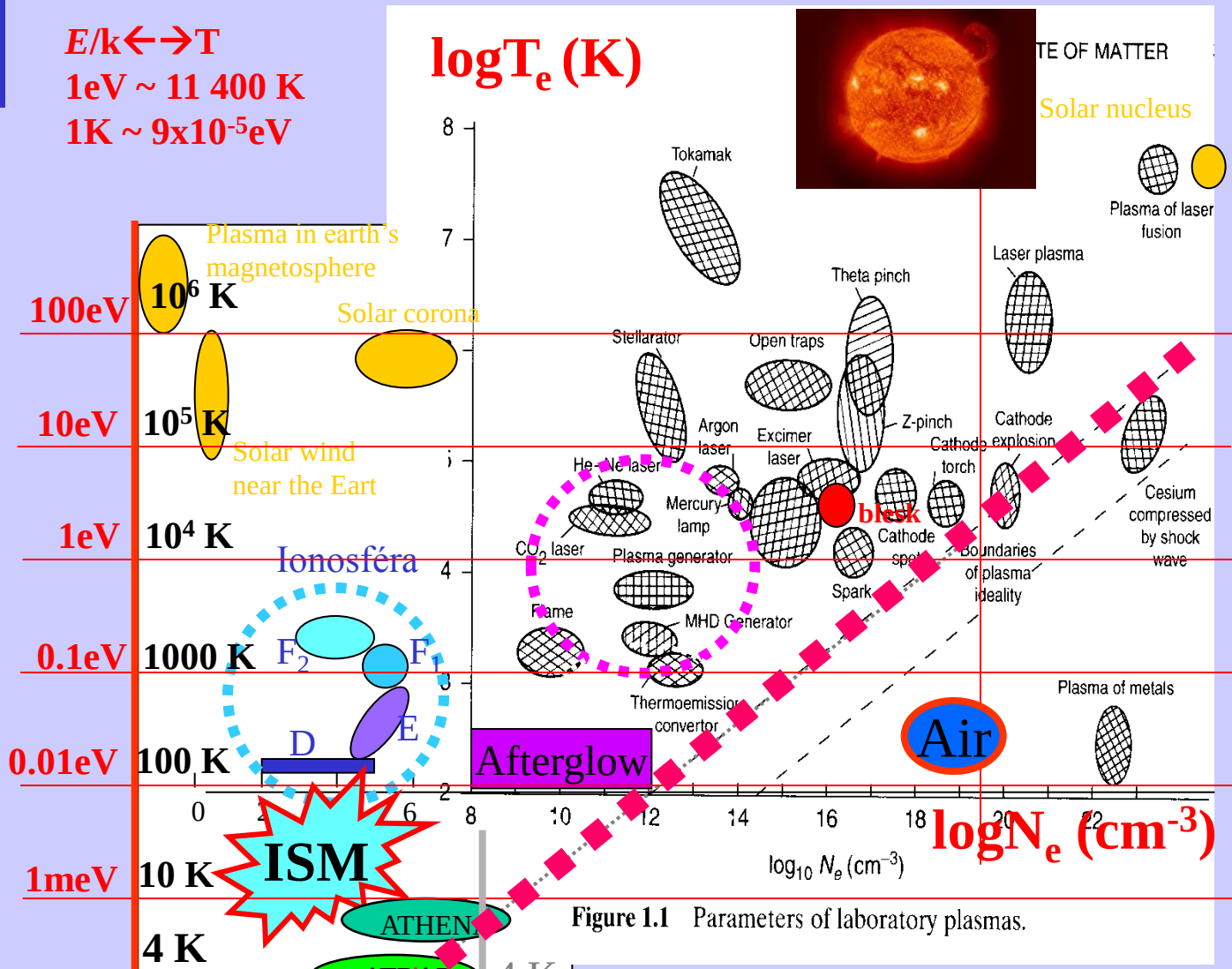
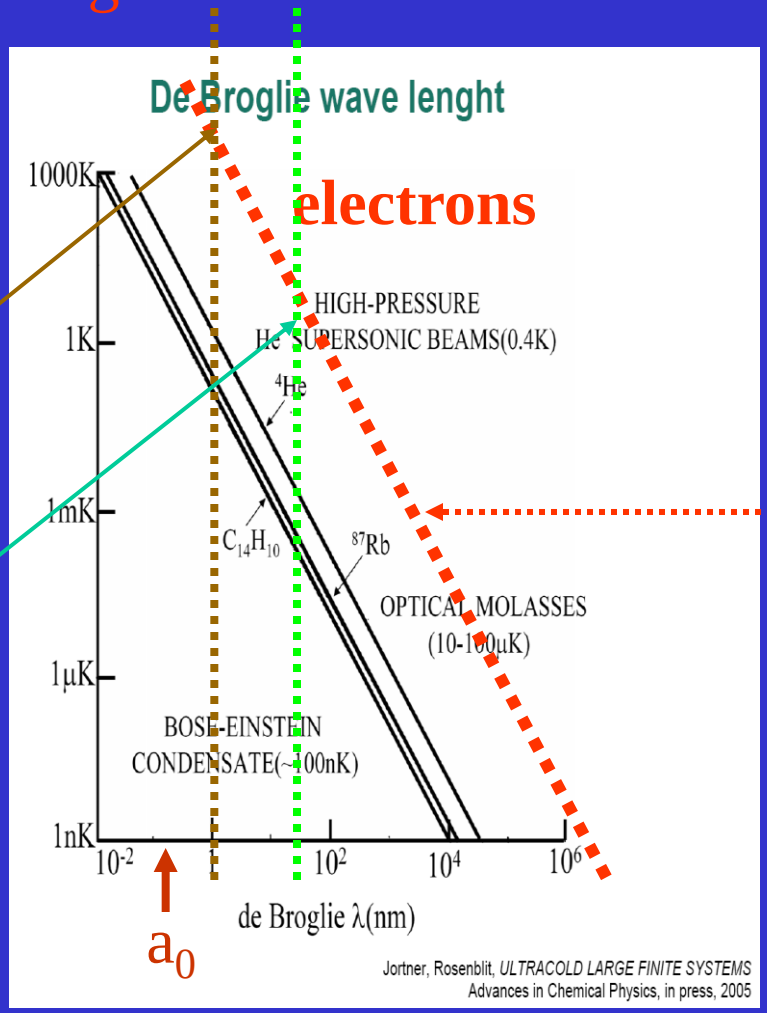


Figure 1.1 Parameters of laboratory plasmas.

De Broglie wave length

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{Mv} \sim \frac{h}{\sqrt{MT}}$$



1eV

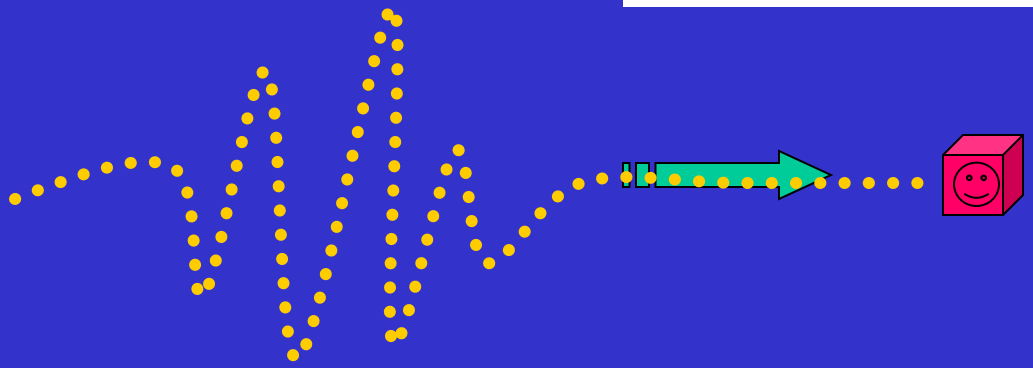
$$\lambda_{eDB}(1eV) \sim 11.6\,A \sim 1.16x10^{-9}\,m$$

4K

$$\lambda_{eDB}(4K) \sim 540\,A \sim 54x10^{-9}\,m$$

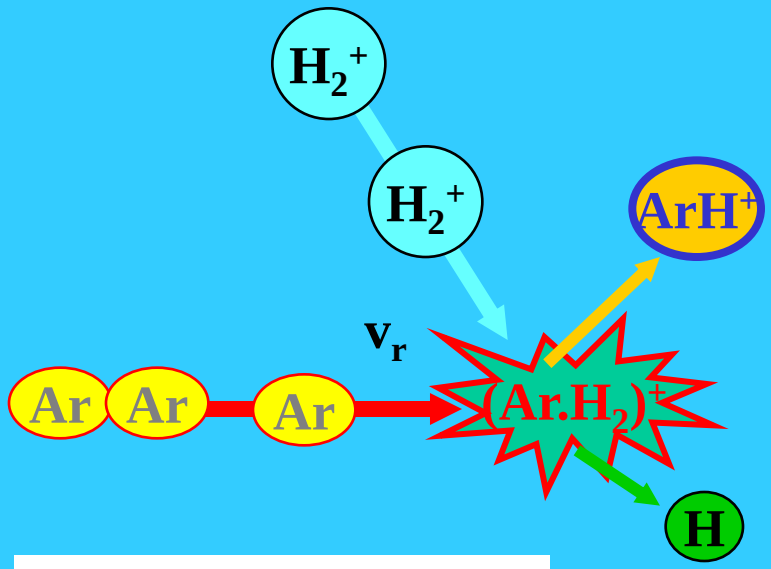
$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m_e v_e} \sim \frac{h}{\sqrt{m_e T}}$$

$$T \sim= \frac{1}{\lambda_{DB}^{\,2}}$$

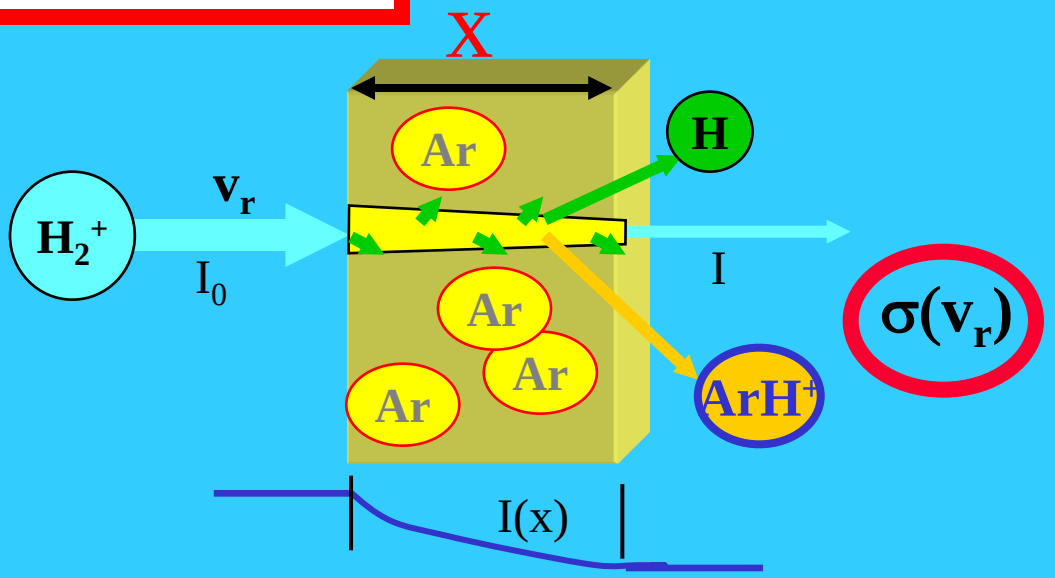


Single collision

$$H_2^+ + Ar \Rightarrow ArH^+ + H$$



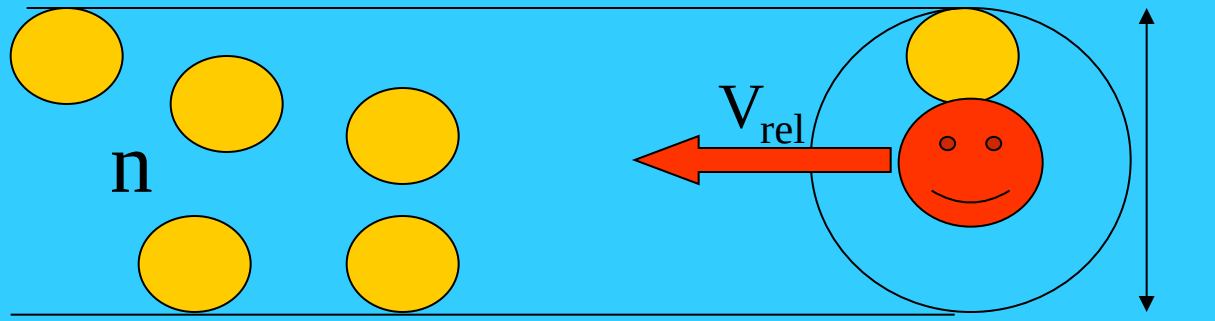
reaction cross section



$I=I_0\exp(-\sigma n_{Ar} x)$

$$\nu_{coll} = +nV_{rel} = +n\nu S = +n\nu\pi\delta^2 = +n\nu\sigma$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{\tau_{coll}} = -I\nu_{coll}$$

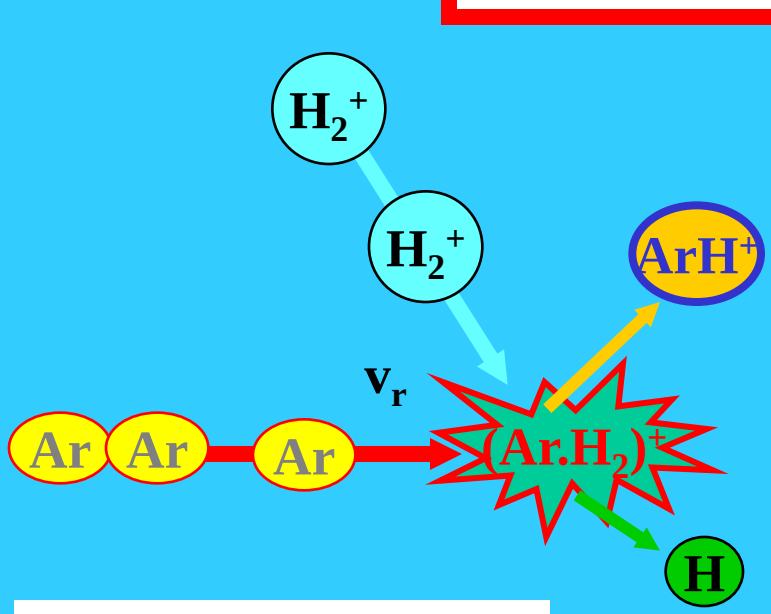


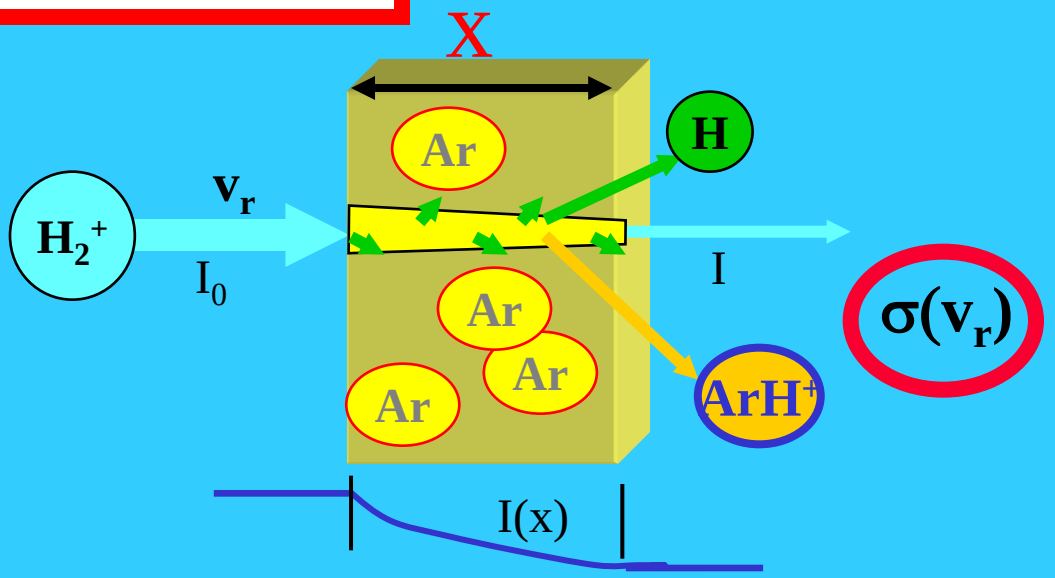
$$I(t) = I_0 \exp(-\nu_{coll} t) = I_0 \exp(-\sigma n \nu_{rel} t)$$

$I=I_0\exp(-\sigma n_{Ar} x)$

Single collision

$$H_2^+ + Ar \Rightarrow ArH^+ + H$$





reaction cross section

$$I = I_0 \exp(-\sigma n_{Ar} x)$$

Proportionality factor

$$\frac{dI}{dx} \sim -INx \qquad \frac{dI}{dx} = -\sigma INx$$

$$\frac{dI}{Idx} = \frac{d\ln(I)}{dx} = -\sigma Nx$$

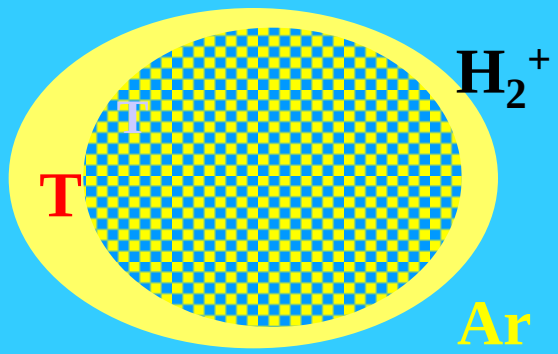
$$I(x) = I_0 \exp(-\sigma Nx)$$

Kinetics of elementary process

$$H_2^+ + Ar \Rightarrow ArH^+ + H$$

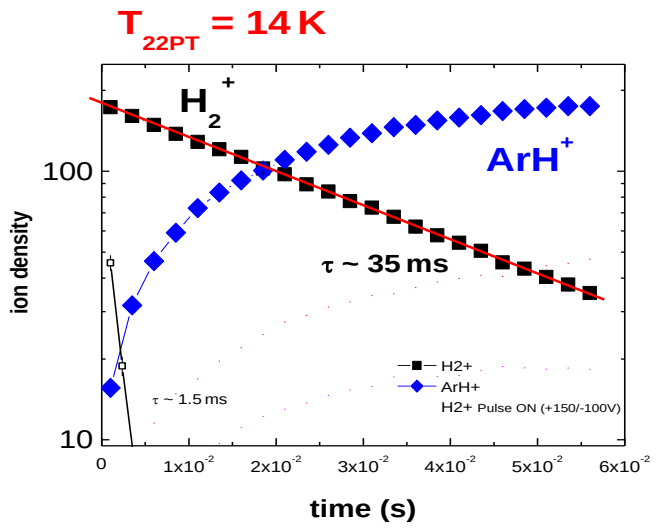
Multiple collision

@ T



reaction rate coefficient

$$d(n_{H2^+})/dt = -k\, n_{H2^+}.\, n_{Ar}$$

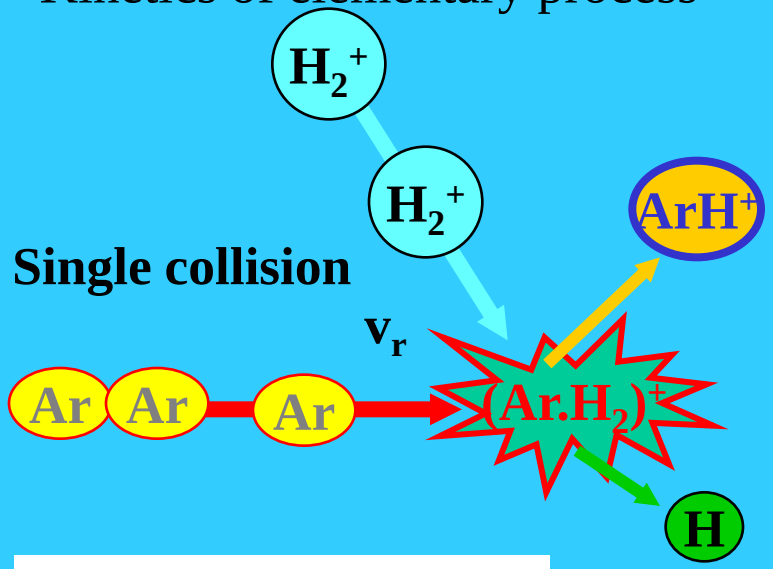


$$n_{H2^+}. = (n_{H2^+}).{}_0 \exp(-k n_{Ar} t)$$

k(T)

Kinetics of elementary process

$$H_2^+ + Ar \Rightarrow ArH^+ + H$$



reaction cross section

$$I = I_0 \exp(-\sigma n_{Ar} x)$$

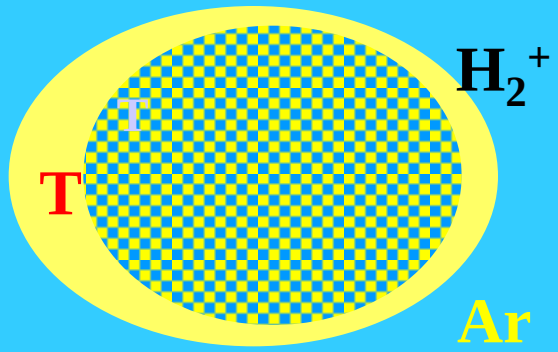
$\sigma(v_r)$

$k(T) = \langle v\sigma \rangle$

$k(T)$

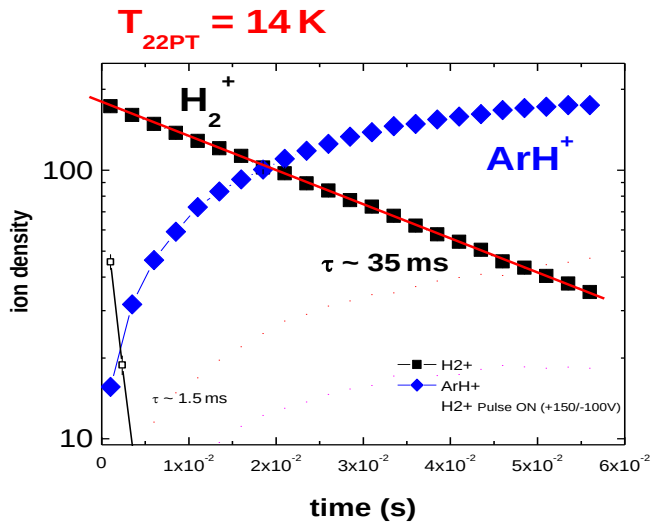
Multiple collision

@ T



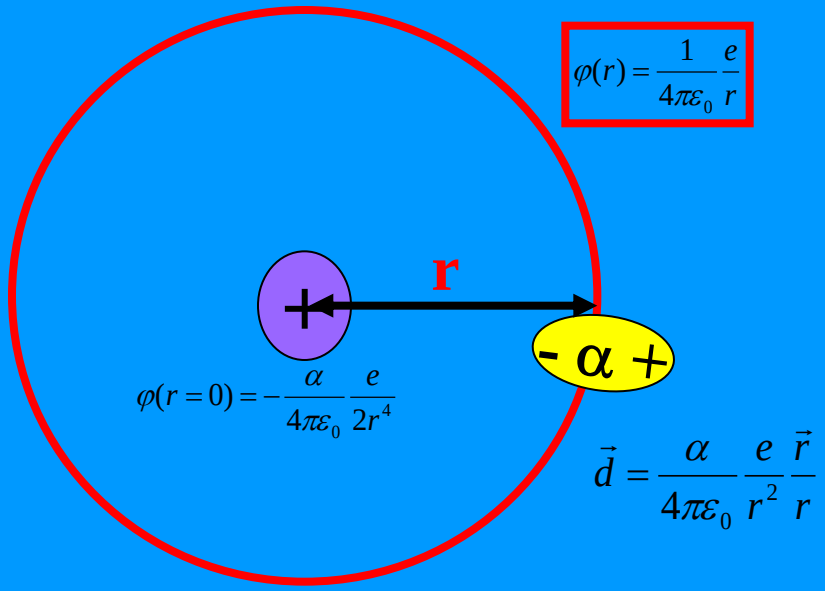
reaction rate coefficient

$$d(n_{H2^+})/dt = -k\, n_{H2^+}.\, n_{Ar}$$



$$n_{H2^+}. = (n_{H2^+}).{}_0 \exp(-k n_{Ar} t)$$

Collision cross section of IMR

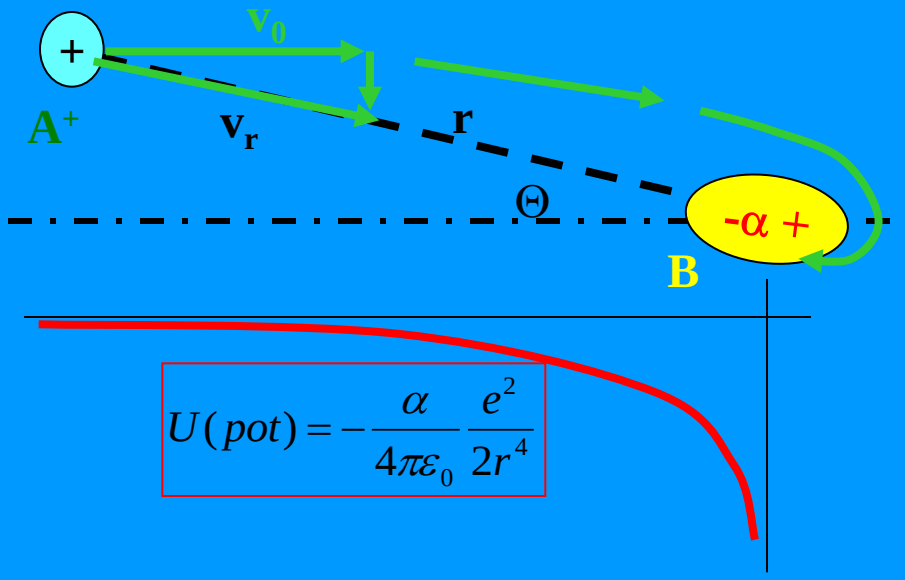


$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$$

$$\varphi(r=0) = -\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{2r^4}$$

$$\vec{d} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

α - polarizability

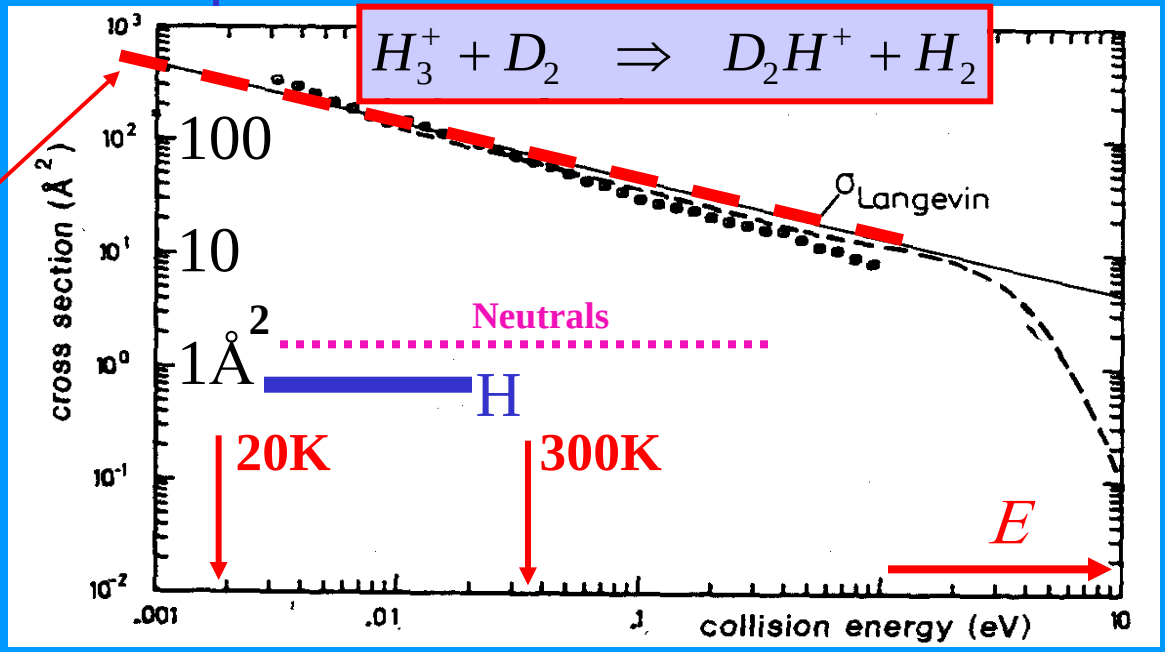


$$U(pot) = -\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r^4}$$

$$\frac{\mu v_0^2}{2} = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r^4}$$

$$\sigma = \pi\rho_0^2 = \frac{2\pi e}{v_0(4\pi\varepsilon_0)}\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}$$

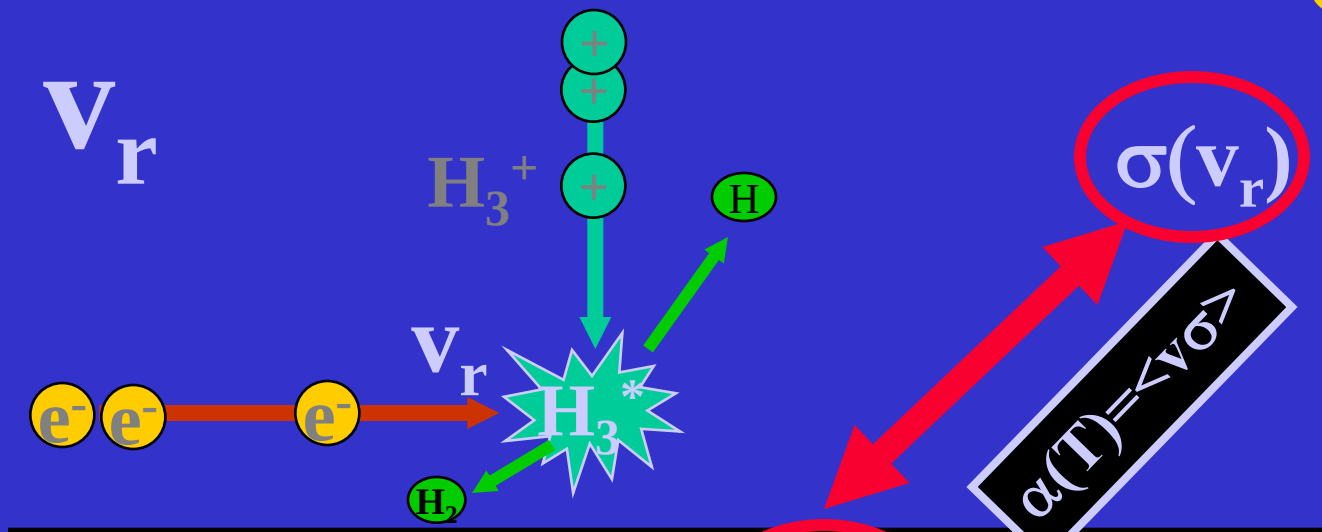
$$\sigma = \pi\rho_0^2 \sim \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$



N3+

$H_3^+ + e^- \rightarrow H + H_2; 3H$

Cross section

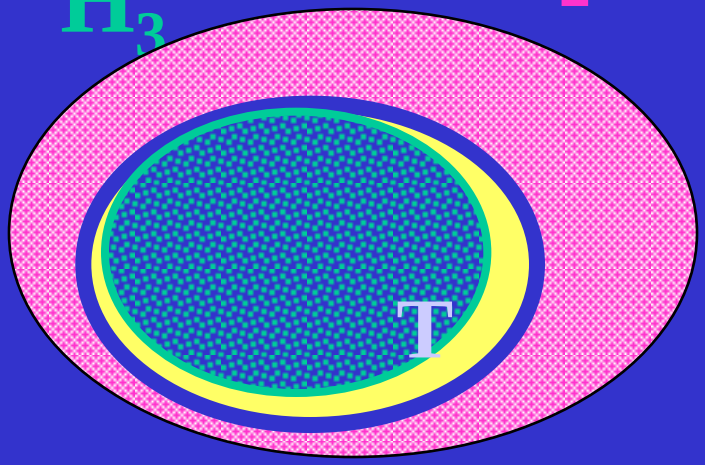


$\alpha(T)$ Rate coefficient

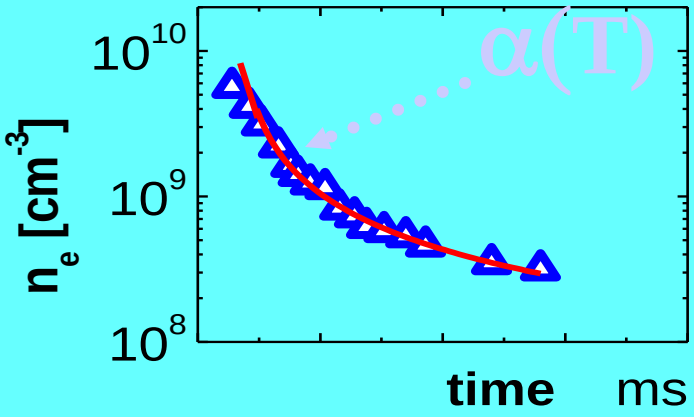
T

Multiple collisions

H_3^+ He, H,H_2 hν…



$dn_e/dt=-\alpha n_i n_e=-\alpha n_e^2$



Electron ion interaction

Fázový prostor

- Přecházíme z exaktního popisu na popis pomocí pravděpodobností.
- Rozdělovací funkce

N interagujících částic ---- každá se řídí zákony klasické dynamiky.

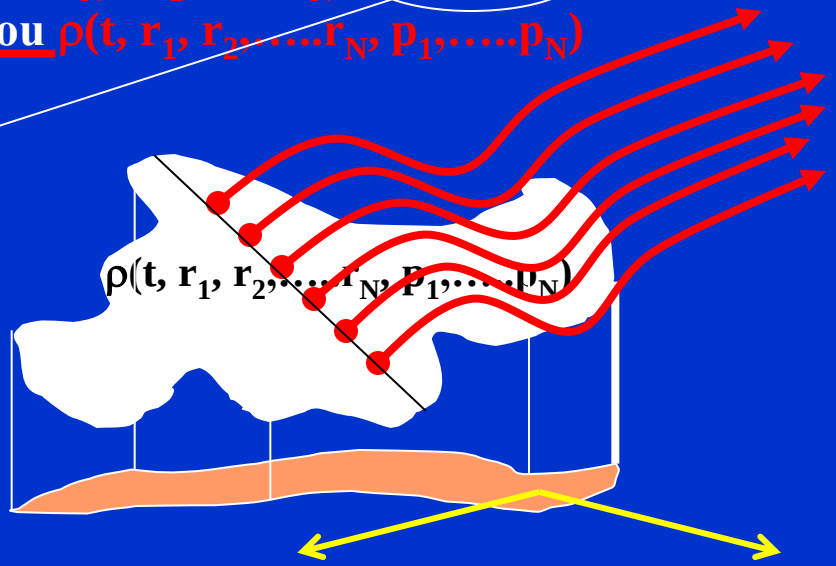
souřadnice impuls

Element dΓ v Γ prostoru jako: $d\Gamma = dr_1\, dr_2 \ldots dr_N\, dp_1 \ldots dp_N = dr^N dp^N$

Soubor systému představuje „oblak“ s hustotou $\rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$

Celkový počet fází v souboru je

$$\int \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^N dp^N = W$$



Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$$

Integraci P přes podmnožinu proměnných získáme „průmět“ nezávislý na souřadnicích $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N (t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^{N-q} dp^{N-q}$$

Pokud prointegrujeme přes impulsy získáme pravděpodobnost, že systém má určitou konfiguraci rozložení v prostoru

$$P_N (t, r_1, \ldots\ldots r_N) = \int P_N (t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dp^N$$

Liouvillův teorém

- Hamiltonián N častíc
- Zobecněné souřadnice

Sledujeme časový vývoj souboru N částic…
každá částice se pohybuje v souladu s Hamiltonovými rovnicemi:

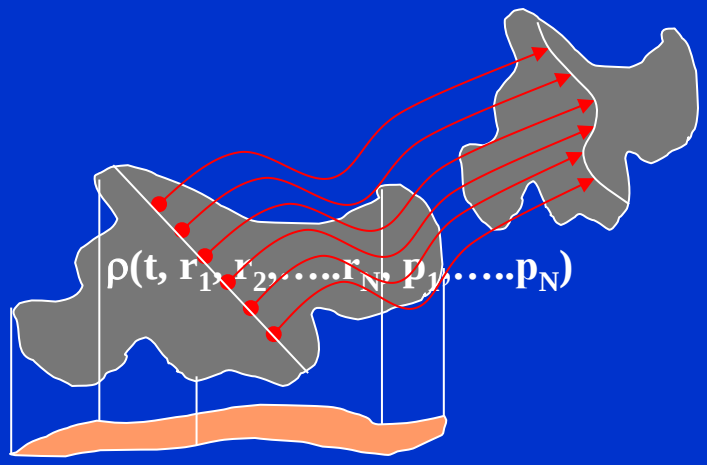
$$(1.9) \qquad \dot{p}_{i_\alpha} = -\frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial r_{i_\alpha}}$$

$$\dot{r}_{i_\alpha} = \frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial p_{i_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace, Jakobian transformace J=1 a proto je

$$\int d\Gamma = \int dr^N dp^N = \text{const}, \qquad (1.10)$$

Fázový objem se nemění.
Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina…
proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“



J=1

Úvod

Soubor systému představuje „oblak“ s hustotou $\rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$

- Formy Liouvilovho teorému
- Vnější a vnitřní síly

(1.11) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho V) = 0$$

Pořadí deriivací

nebo, což je totéž

(1.12) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} V + V \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0 ,$$

kde V je „rychlost“ v Γ prostoru (o složkách $\dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_N, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_N$), která splňuje rovnici

(1.13) $$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial \dot{r}_{i_\alpha}}{\partial r_{i_\alpha}} + \frac{\partial \dot{p}_{i_\alpha}}{\partial p_{i_\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r_{i_\alpha} \partial p_{i_\alpha}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i_\alpha} \partial r_{i_\alpha}} \right) = 0 ,$$

jako důsledek platnosti Hamiltonových rovnic (1.9). Rovnice (1.12) má potom tvar

(1.14) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0 ,$$

nebo

(1.15) $$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + [\varrho; H] = 0 ,$$

(1.9) $$\dot{p}_{i_\alpha} = -\frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial r_{i_\alpha}}$$

$$\dot{r}_{i_\alpha} = \frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial p_{i_\alpha}} , \quad \alpha = 1, 2, 3 ,$$

což můžeme psát jako

Collisions

(1.16) $$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \nabla_{r_i} \varrho + \sum_{i=1}^{N} (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} \varrho = 0 ,$$

kde $[\varrho; H]$ jsou Poissonovy závorky, v_i je rychlost i-té částice, X_i je vektor vnější síly, působící na i-tou částici, a F_i je vektor vnitřní síly působící na i-tou částici, která pochází od $(N-1)$ zbývajících částic.

Po vydělení rovnic (1.14), (1.15) a (1.16) počtem W systémů dostáváme rovnice pro P_N

(1.14′) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad} P_N = 0 ,$$

(1.15′) $$\frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0 ,$$

(1.16′) $$\frac{dP_N}{dt} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \nabla_{r_i} P_N + \sum_{i=1}^{N} (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} P_N = 0 .$$

Pokud prointegrujeme přes impulsy …

$P_N(t, r_1, \ldots\ldots r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dp^N$

Závislost na čase a poloze

Hustota pravděpodobnosti

$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$

1.3 Gibbsův H teorém

- entropia
- reversibilita a ireversibilita procesů

Ve statistické fyzice je entropie S úzce spjata s takzvanou H-funkci a to vztahem

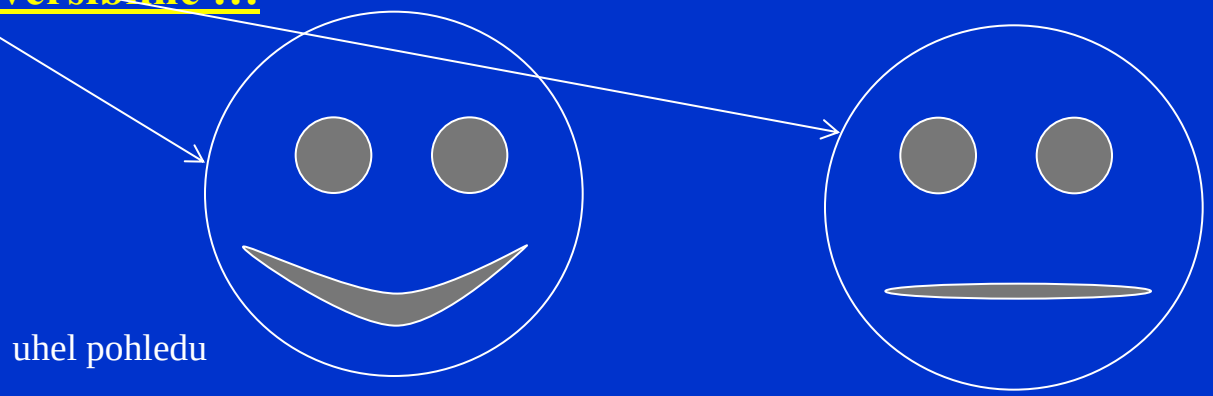
$$S=-kH=-k\int P_N \ln P_N, \quad \text{kde } H = \int P_N \ln P_N$$

Použijíc **Liouvilla teorému** dospějeme k výrazu

$$dH/dt=0 \longrightarrow dS/dt=0$$

To znamená, že systém se časově nevyvíjí…..
t.j. nerovnovážný systém se nemůže nikdy dostat do stavu rovnovážného.

Paradox- klasická mechanika vede k přísně reverzibilnímu popisu, zatím co příroda se chová ireversibilně …



1.4 Rovnice BBGKY

(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

1.4 Rovnice BBGKY

Funkce $P_N (t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$ má určite vlastnosti plynoucí z jejího vztahu k částicím… Pomocí této funkce můžeme určit některé makroskopické veličiny charakterizující daný soubor částic v bodě r….
Např. proudová hustota v bodě r je daná vztahem

$$J(t,r) = \int J(r)\, P_N (t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^N\, dp^N \qquad (1.27)$$

kde $J(r)$ je operátor hustoty proudu

$$J(r) = \Sigma\, p_i \delta(r - r_i) \qquad (1.28)$$

Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$$

Náboj ??

$$\hat{j}(r) = \Sigma\, e/m^* p_i \delta(r - r_i)$$

operátor hustoty proudu (toku náboje)

Koncentrace částic $n(r; t)$ v místě r je

$$n(r; t) = \int \hat{n}(r)\, P_N(t; r_1, \ldots, p_N)\, dr^N\, dp^N , \qquad (1.29)$$

kde $\hat{n}(r)$ je operátor polohy

$$\hat{n}(r) = \sum_{i=1}^{N} \delta(r - r_i) . \qquad (1.30)$$

Hustota kinetické energie $E(t; r)$ v místě r je rovna

$$E(t; r) = \int \hat{E}(r)\, P_N(t; r_1, \ldots, p_N)\, dr^N\, dp^N , \qquad (1.31)$$

kde $\hat{E}(r)$ je operátor kinetické energie

$$\hat{E}(r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} \delta(r - r_i) \qquad (1.32)$$

a m_i je hmotnost i-té částice.

Pro nabité částice je dále možno zavést proudovou hustotu $j(t; r)$ v bodě r (hustotu toku náboje) vztahem

$$j(t; r) = \int \hat{j}(r)\, P_N(t; r_1, \ldots, p_N)\, dr^N\, dp^N , \qquad (1.33)$$

kde $\hat{j}(r)$ je operátor hustoty proudu (toku náboje)

Úvod k BBGKY
(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

Z výše uvedených úvah plyne, že je vhodné zavést takové funkce a rovnice pro tyto funkce, které budou určovat chování s částic souboru ($s \ll N$). Definujme tedy pro $s \ll N$ funkci $F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)$ tímto způsobem:

$$F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = V^s P_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = \tag{1.38}$$

$$= V^s \int \ldots \int P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N$$

pro $s = 1, 2, 3, \ldots$

Z normovací podmínky

$$\frac{1}{V^s} \int \ldots \int F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_s = 1 \tag{1.39}$$

$V^{-s}F_s(t,r_1, \ldots r_s,p_1 \ldots p_s)$ je pravděpodobnost toho, že skupina S částic ze souboru N částic se bude v čase t nacházet v elementu $dr_1, \ldots dr_s,dp_1 \ldots dp_s$ bez ohledu na stav zbývajících (N-s) částic.

Pro interagující částice

- Trochu omezíme obecnost Hamiltonianu

(1.42) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} - [H; P_N] = 0 .$$

Hamiltonovu funkci H pro N vzájemně interagujících částic můžeme zapsat ve tvaru

(1.43) $$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m_i} + U_i(\boldsymbol{r}_i) \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^{N} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi_{ij} ,$$

kde $H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i)$ je hamiltonián samotné i-té částice a $U_i(\boldsymbol{r}_i)$ je potenciál, který je způsobený efekty na stěnách a vnějšími silami. $\Phi_{ij} = \Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ je interakční potenciál mezi i-tou a j-tou částicí.

Použitím rovnice (1.43) můžeme Liouvillovu rovnici (1.42) přepsat do tvaru

(1.44) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} [H_i; P_N] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} [\Phi_{ij}; P_N] = 0 .$$

Budeme-li dále násobit (1.44) V^s a integrovat s ohledem na $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N$ (přes fázový prostor $(N - s)$ částic), dostaneme

(1.45) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} V^s \int \ldots \int [H_i; P_N] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} V^s \int \ldots \int [\Phi_{ij}; P_N] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N ,$$

BBGKY rovnice

- Po mnohých úpravách
- Po mnohých omezeních
- Po mnohých zjednodušeních

Budeme-li dále předpokládat, že pro $|\boldsymbol{r}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{r}_j) \to 0$ a pro $|\boldsymbol{p}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{p}_j) \to 0$, dostaneme integrací per partes relace

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

kde

(1.53)
$$H_s = \sum_{i=1}^{s} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{s} \Phi_{ij}$$

je Hamiltonova funkce uzavřeného systému s částic.

S+1

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí

F_s je funkci F_{s+1} → soustava rovnic

Jsme tam, kde jsme byli !!

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

- Po mnohých úpravách ….
- Po mnohých omezeních
- Po mnohých zjednodušeních

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} .$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

(1.54) $$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2) \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$$

a pro $s = 2$ dostaneme

(1.55) $$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_3 .$$

Odvození Boltzmannovy rovnice

$$\lim_{\substack{V\to\infty\\ N\to\infty}} \frac{V}{N} = v, \quad 0 < v < \infty;$$

v je potom převrácená hodnota koncentace n, $v = 1/n$. Rovnice (1.52) má potom tvar*)

(1.56)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{s}\int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}.$$

Hledaní řešení B. rovnice

- Ve tvaru řady

v je potom převrácená hodnota koncentace n, $v = 1/n$. Rovnice (1.52) má potom tvar*)

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \,. \tag{1.56}$$

Sledujme tedy model klasického zředěného plynu, kdy $r_0^3/v \ll 1$, tj. interakční potenciál je krátkého dosahu a koncentrace částic je nízká. Naším dalším úkolem je výpočet funkce F_s. K tomuto účelu rozložme F_s do řady podle malého parametru r_0^3/v. Z rovnic (1.56) a (1.57) je zřejmé, že z formálního hlediska můžeme místo parametru r_0^3/v přijmout parametr $1/v$, aniž se změní obecnost daného postupu. Položme proto

$$F_s = F_s^{(0)} + \frac{1}{v} F_s^{(1)} + \frac{1}{v^2} F_s^{(2)} + \ldots . \tag{1.58}$$

Dosadíme-li nyní daný rozklad do rovnice (1.56) a porovnáme-li členy obsahující stejné mocniny $1/v$, dostaneme

$$\frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}] \,, \tag{1.59}$$

$$\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int [\sum_{i=1}^{s} \Phi_{i,s+1}; F_{s+1}^{(0)}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \tag{1.60}$$

atd.

$F_s^{(0)}$

$F_s^{(1)}$

$F_s^{(2)}$

Máme tedy rovnice typu

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = [H_s; \Phi(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)] + f(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) \,. \tag{1.61}$$

2. Vzájemné působení částic

- Rozebereme pružné srážky
- Srážky e- neutrál, e- ion, e-e.....

Už máme rovnice

(1.59) $$\frac{\partial F_s^{(0)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(0)}],$$ $F_s^{(0)}$

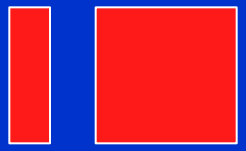
(1.60) $$\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial t} = [H_s; F_s^{(1)}] + \int [\sum_{i=1}^{s} \Phi_{i,s+1}; F_{s+1}^{(0)}] \, d\boldsymbol{r}_{s+1} \, d\boldsymbol{p}_{s+1}$$ $F_s^{(1)}$

atd.

....co potřebujeme je znalost interakce částic ….
Elementární procesy v jiném pojetí

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí

F_s je funkci F_{s+1} **soustava rovnic**



Vzájemné působení částic

Sila kterou působí částice 2 na částici 1 je $\mathbf{F}_{12}$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \qquad 2.1$$

budeme předpokládat, že síly klesají dostatečně rychle s **r**

- Zákony zachování

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu ,$$

Laboratorní a těžiskový systém

Pohyb každé z těchto částic je ve shodě s Newtonovými rovnicemi, tj.

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12}$$
$$m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21} .$$

Těžiště systému dvou částic $\boldsymbol{r}_c$ je nyní určeno rovnicí

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \mu_1 \boldsymbol{r}_1 + \mu_2 \boldsymbol{r}_2$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1 .$$

- Pozor μ_1 a μ_2 su bezrozmerné

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_c = \mu_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 + \mu_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 .$$

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_c = \text{konst} = \boldsymbol{v}_c .$$

$$\boldsymbol{\varrho}_1(t) = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_c ,$$
$$\boldsymbol{\varrho}_2(t) = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_c .$$

Těžiště soustavy dvou částic
se pohybuje konstantní rychlostí během celého srážkového procesu

Relativní rychlost během srážky

- Zachování relativních rychlosti
- Pohyb kolem silového centra

Relativní rychlost $g_{12}=\dot{r}_{12}$

Ze zákonu zachovaní energie plyne

$$g_{21}^2 = g_{21}'^2$$

Označíme-li $|g_{21}| = g$ a $|g'_{21}| = g'$ máme pak, že

$$g = g' ;$$

Absolutní hodnota relativních rychlostí se během srážky zachovává, může se měnit pouze jejích směr

$$\ddot{r}_1 = \frac{F_{12}}{m_1}, \quad \ddot{r}_2 = \frac{F_{21}}{m_2}.$$

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = \frac{F_{21}}{m_2} - \frac{F_{12}}{m_1} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) F_{21} = \frac{1}{\mu} F_{21}$$

$$\frac{d\dot{r}_{21}}{dt} = \frac{1}{\mu} F_{21} .$$

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ, která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $r = r_2 - r_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1.

Pohyb fiktivní částice

$$\frac{d\dot{r}_{21}}{dt} = \frac{1}{\mu} F_{21} .$$

- Pohyb v rovině

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ, která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $r = r_2 - r_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1.

S polohou těžiště ???

Ukážeme si dále, že daný pohyb je pohybem rovinným. K tomuto účelu násobme (2.25) vektorově vektorem $r = r_2 - r_1$. Dostáváme

$$(r_2 - r_1) \times \frac{d^2(r_2 - r_1)}{dt^2} = \frac{1}{\mu} F_{21} \times (r_2 - r_1) . \tag{2.26}$$

Paralelné vektory

Protože ale vzájemné působící síly jsou centrální, je pravá strana (2.26) rovna nule. Po kratších úpravách je potom možno (2.26) přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(r \times \frac{dr}{dt}\right) = 0 , \tag{2.27}$$

odkud dostáváme, že

$$r \times \frac{dr}{dt} = k , \tag{2.28}$$

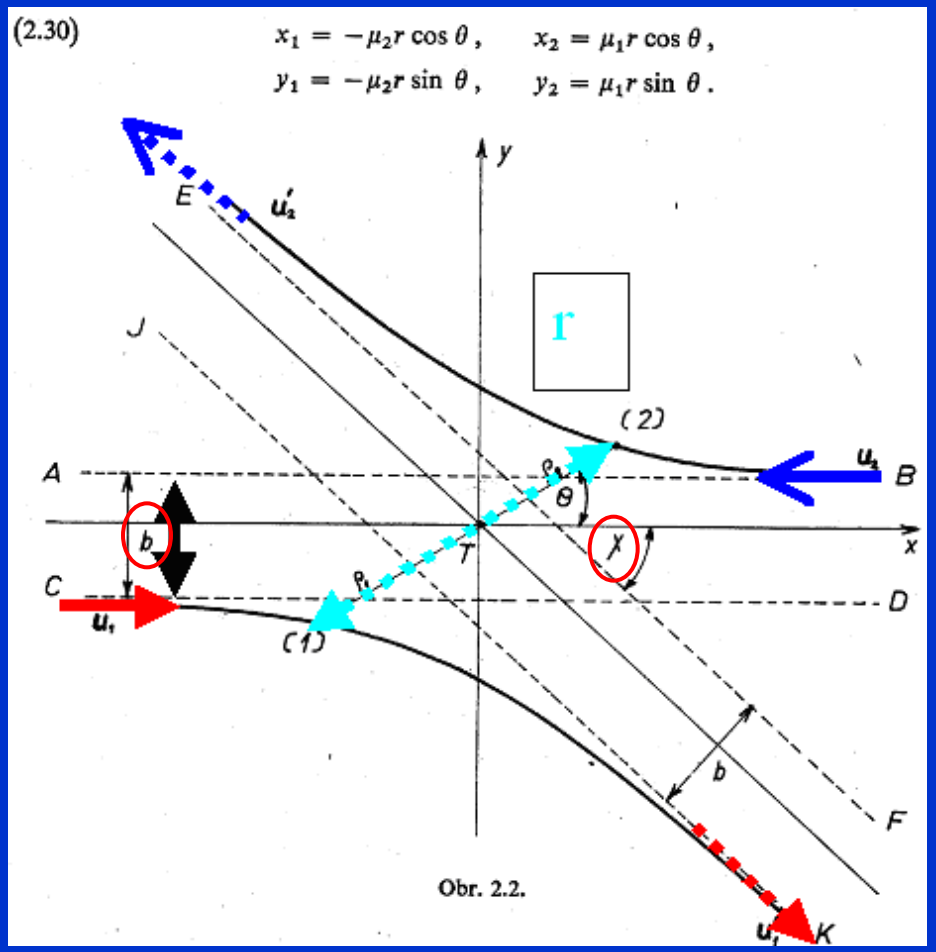
kde k je konstantní vektor (je určen z počátečních podmínek našeho problému). To ale znamená, že vektor r i vzájemná rychlost částic leží stále v jedné rovině a tedy námi vyšetřovaný vzájemný pohyb částic je skutečně rovinný.

Těžišťový systém

- Pohyb v těžišťové soustavě
- **Je výhodné pracovat v těžišťové soustavě**

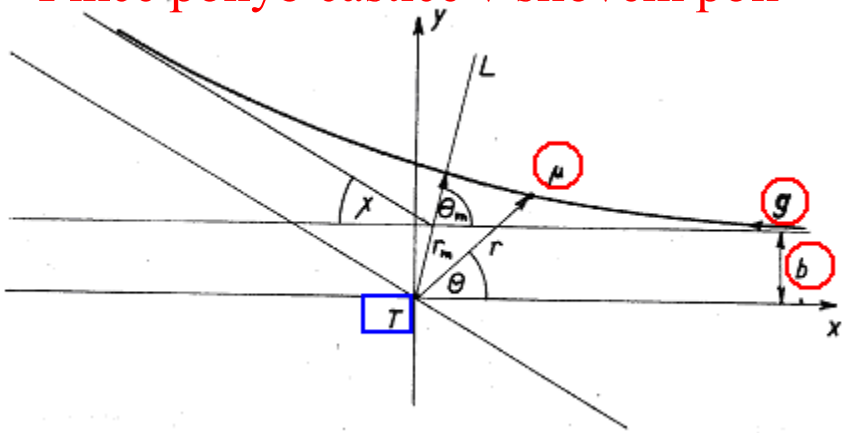
(2.30)

$$x_1 = -\mu_2 r\cos\theta\,, \qquad x_2 = \mu_1 r\cos\theta\,,$$
$$y_1 = -\mu_2 r\sin\theta\,, \qquad y_2 = \mu_1 r\sin\theta\,.$$



Obr. 2.2.

Fikce pohyb částice v silovém poli



Obr. 2.4.

K popisu takovéhoto pohybu plně postačí výše uvedené integrály pohybu (2.33) a (2.34). Tyto rovnice nám společně s rovnicemi (2.36) a (2.38) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic

(2.39) $$\mu b g = \mu r^2\dot{\theta}$$

(2.40) $$\tfrac{1}{2}\mu g^2 = \tfrac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$$

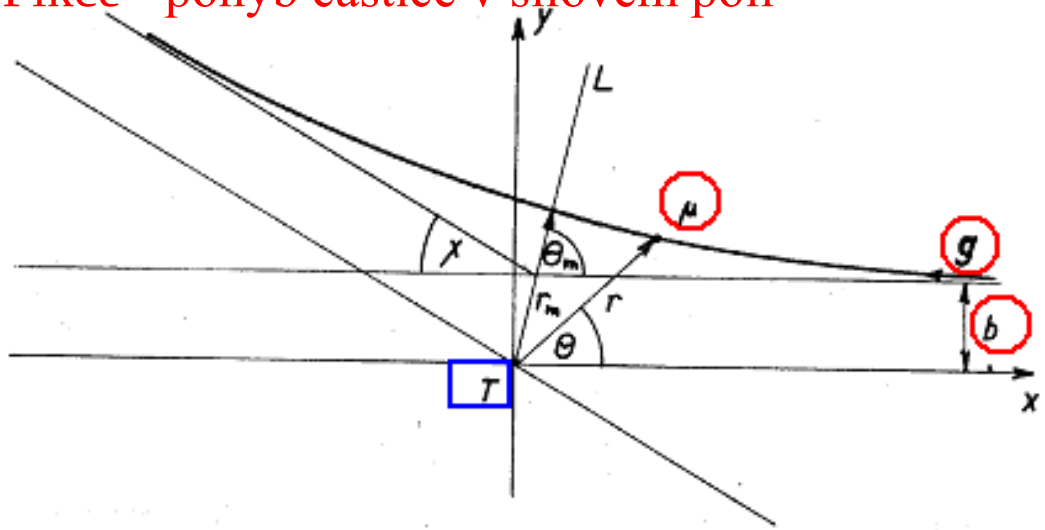
pro dvě neznámé r a θ.

Pohyb v poli centrálních sil

- Srážkový parametr
- Uhel rozptylu

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ, která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $r = r_2 - r_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1.

Fikce - pohyb částice v silovém poli



Obr. 2.4.

derivace

K popisu takovéhoto pohybu plně postačí výše uvedené integrály pohybu (2.33) a (2.34). Tyto rovnice nám společně s rovnicemi (2.36) a (2.38) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic

(2.39) $\mu b g = \mu r^2 \dot{\theta}$

(2.40) $\frac{1}{2}\mu g^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)$

pro dvě neznámé r a θ.

$$\frac{1}{2}\mu g^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{b^2 g^2}{r^2}\right) + U(r),$$

$$\dot{r}^2 = g^2\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2}\right)$$

Úhel odklonu χ je nyní podle (2.42)

(2.49) $$\chi = \pi - 2\theta_m = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty}\left[\frac{r^4}{b^2} - r^2 - \frac{2r^4\,U(r)}{\mu g^2 b^2}\right]^{-1/2} dr\,.$$

Elementární důsledky

- Předáni energie při srážce
- Velký rozdíl hmot
- Stejné hmoty

Ze zákonu zachovaní energie plyne

před po

$$v_2^2 - v_2'^2 = \frac{m_1}{m_2} v_1'^2 .$$

co vede ke vztahu

$$v_2^2 - v_2'^2 = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_2^2 (1 - \cos \chi) .$$

$\eta = m_2/m_1$

Jestliže $m_2 = m_1$, pak $\eta = 1$

(2.72) $\theta_2 \sim \frac{\chi}{2}, \quad \theta_1 \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$

a funkce $\bar{\Delta}$ je maximální

(2.73) $\bar{\Delta} \cong \frac{1}{2} .$

Ar^+ na Ar

$\Delta \sim 1/2$

Jestliže $m_2 \gg m_1$, pak $\eta \gg 1$

(2.74) $\theta_2 \sim \frac{m_1}{m_2} \sin \chi , \quad \theta_1 \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$

a

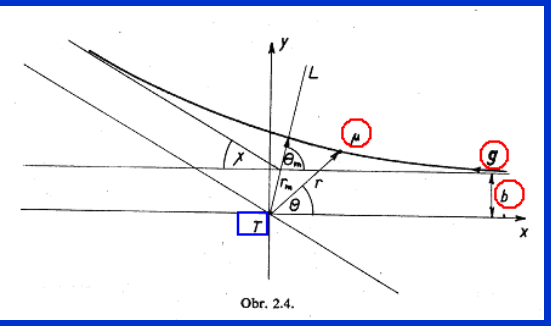
(2.75) $\bar{\Delta} \sim \frac{2m_1}{m_2} .$

e^- na Ar

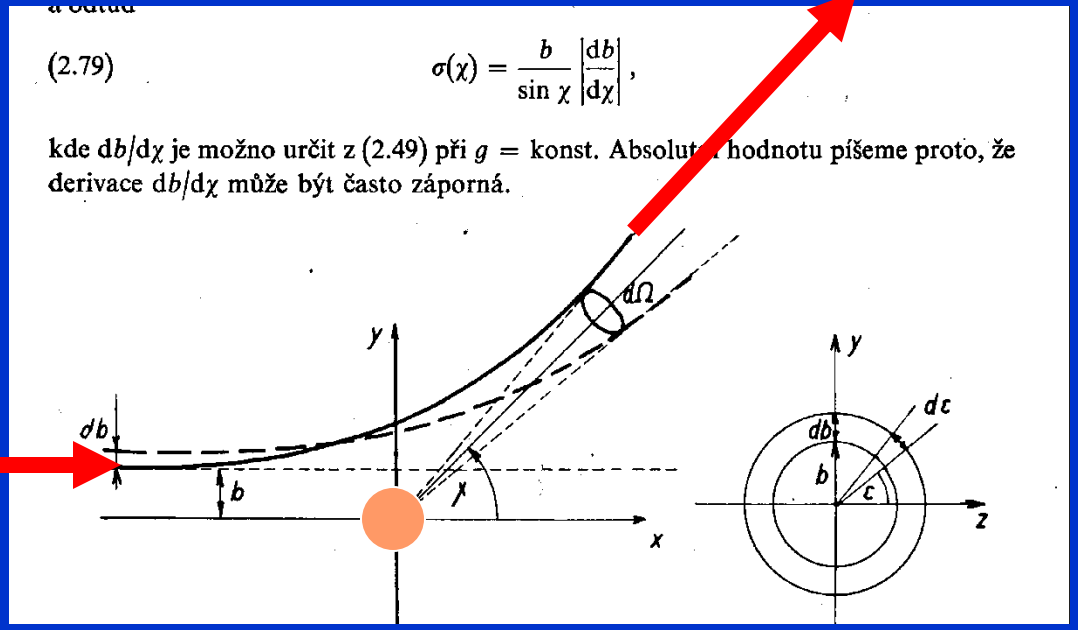
$\Delta \sim 2/2000*40 = 1/40\,000$

Diferenciální průřez.

- Elastické srážky.
- Diferenciální průřez.



Obr. 2.4.


(2.79) $\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|$,

kde $db/d\chi$ je možno určit z (2.49) při g = konst. Absolutní hodnotu píšeme proto, že derivace $db/d\chi$ může být často záporná.

N

N částic za sekundu

$dn = Nb\, db\, d(\varepsilon)$

$dn = \sigma(\chi)\, N\, d\Omega$

Diferenciální průřez elastické srážky

$$dn = Nb\, db\, d(\varepsilon) = \sigma(\chi)\, N\, d\Omega = N\, \sigma(\chi)\, \sin\chi\, d\chi\, d(\varepsilon)$$

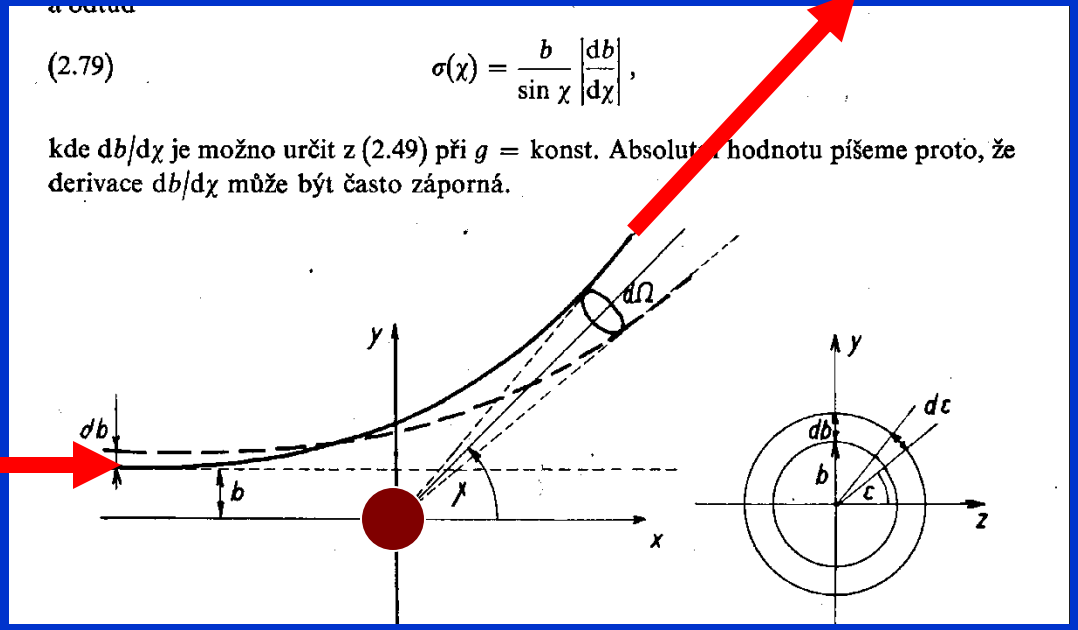
Diferenciální průřez elastické srážky

$$\sigma(\chi) = (b/\sin\chi).\, db / d\chi$$

Celkový účinný průřez

- Celkový účinný průřez
- Problém s experimentem

N(v)



$dn = Nb\ db\ d(\varepsilon)$

$dn = \sigma(\chi)\ N\ d\Omega$

$$\sigma(\chi) = b\ db / d\chi\ \sin\chi$$

$$\sigma_c(v) = \int\sigma(\chi)\ d\Omega = 2\pi\int\sigma(\chi)\ \sin\chi\ d\chi = 2\pi\int b\ db$$

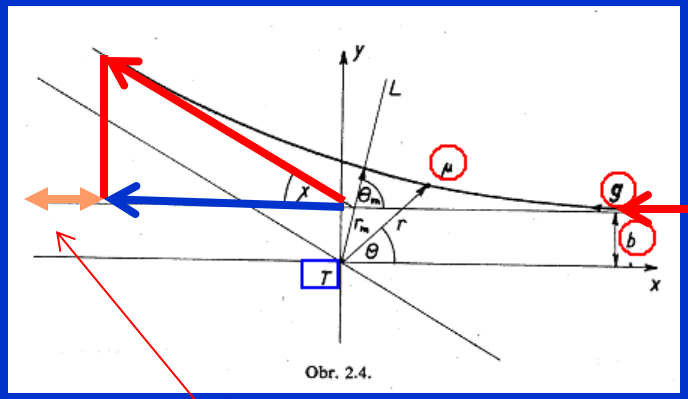
Divergentní integrál ????

χ …..0-π b …..0-infinity

$\sigma_c(v) = \pi D^2$ pro srážku dvou dokonale pružných koulí

Transportní průřez

- Transportní průřez.
- Průřez odklonu



Obr. 2.4.

(1-cosχ)

Jak jsme si ukázali, celkový účinný průřez σ_c z hlediska klasické mechaniky diverguje, a proto je pro naše další úvahy nepoužitelný. V kinetické teorii proto zavádíme veličiny typu

$$Q^{(l)} = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\chi)\,(1 - \cos^l \chi) \sin \chi \, d\chi = \tag{2.90}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} (1 - \cos^l \chi)\, b \, db\,, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

které již mohou být v některých případech konečné a mají tedy jistý fyzikální smysl.

Nejčastěji se vyskytují veličiny $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$. Veličinu

$$Q^{(1)} = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\chi)\,(1 - \cos \chi) \sin \chi \, d\chi \tag{2.91}$$

nazveme transportním průřezem, protože faktor $(1 - \cos \chi)\,\mu g$ určuje snížení impulsu částice v daném směru (viz obr. 2.4).

Veličinu

$$Q^{(2)} = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\chi)\,(1 - \cos^2 \chi) \sin \chi \, d\chi \tag{2.92}$$

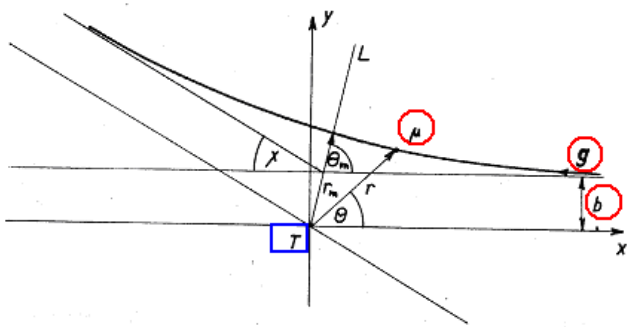
nazveme průřezem odklonu, protože faktor

$$\frac{\mu g^2}{2}(1 - \cos^2 \chi) = \frac{\mu g^2}{2} \sin^2 \chi \tag{2.93}$$

charakterizuje přírůstek kinetické energie ve směru kolmém na směr původní; charakterizuje nám tedy jistým způsobem odklon částice od původního směru.

Coulombovský rozptyl částic

- Rutherfordova formule



Obr. 2.4.

Úhel odklonu χ je nyní podle (2.42)

$$\chi = \pi - 2\theta_m = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty}\left[\frac{r^4}{b^2} - r^2 - \frac{2r^4\,U(r)}{\mu g^2 b^2}\right]^{-1/2} dr\,. \tag{2.49}$$

Pro interakční potenciál $U(r) = Z_1 Z_2 e^2/4\pi\varepsilon_0 r$

Úhel θ_m je nyní podle (2.48) dán vztahem

$$\theta_m = \int_{r_m}^{\infty} \frac{1}{r}\left[\frac{r^2}{b^2} - 1 - \frac{Z_1 Z_2 e^2 r}{(4\pi\varepsilon_0)\,\frac{1}{2}\mu g^2 b^2}\right]^{-1/2} dr\,, \tag{2.95}$$

kde r_m je nezáporný kořen rovnice

$$1 - \frac{b^2}{r_m^2} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(4\pi\varepsilon_0)\,\frac{1}{2}\mu g^2 r_m} = 0\,. \tag{2.96}$$

Zavedeme-li nyní parametr

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \tag{2.97}$$

$U(r) = \mu g^2 * b_0/r$

a novou proměnnou $u = b/r$, je možno (2.95) upravit na

$$\theta_m = \int_0^{u_m} \frac{du}{\left(1 - 2\frac{b_0}{b}u - u^2\right)^{1/2}}, \tag{2.98}$$

kde u_m je nyní kladný kořen rovnice

$$1 - 2\frac{b_0}{b}u_m - u_m^2 = 0\,; \tag{2.99}$$

$$u_m = -\frac{b_0}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{b_0}{b}\right)^2 + 1\right]}. \tag{2.100}$$

Dostaneme $tg(\chi/2)=b_0/b$, to je vztah χ, b_0 a b

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu $\sigma(\chi)$ pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro $\sigma(\chi)$ je dán vztahem (2.79), tj.

$$\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|. \tag{2.113}$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

$$\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{1}{2}\frac{b^2}{b_0}\frac{1}{\cos^2\frac{\chi}{2}} \tag{2.114}$$

a

$$b = b_0 \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2}. \tag{2.115}$$

Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro $\sigma(\chi)$ ve tvaru

$$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4}\frac{1}{\sin^4\frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\,\mu^2 g^4}\frac{1}{4\sin^4\frac{\chi}{2}}. \tag{2.116}$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.*)

Z (2.116) je zřejmé, že $\sigma(\chi)$ nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpudivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantovaja mechanika. op. cit.

Vypadlo b

Rutherfordova formule

- Rutherfordova formule
- Experiment.

Věnujme se nyní výpočtu diferenciálního srážkového průřezu $\sigma(\chi)$ pro případ coulombovských sil. Ukázali jsme si, že obecný výraz pro $\sigma(\chi)$ je dán vztahem (2.79), tj.

(2.113) $$\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|.$$

Z rovnice (2.106) je ale zřejmé, že

(2.114) $$\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{1}{2}\frac{b^2}{b_0}\frac{1}{\cos^2\frac{\chi}{2}}$$

a

(2.115) $$b = b_0 \operatorname{cotg}\frac{\chi}{2}.$$

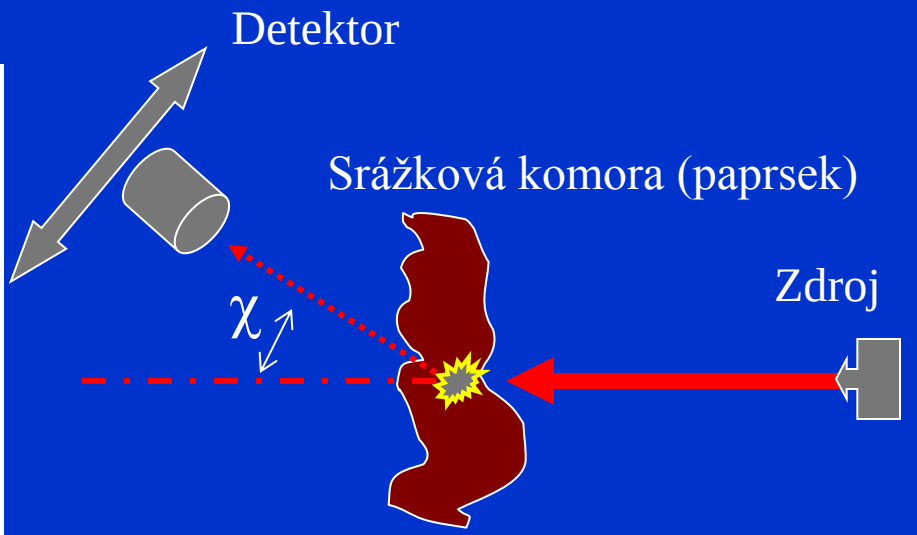
Dosadíme-li nyní (2.114) a (2.115) do (2.113), dostáváme téměř okamžitě požadovaný výraz pro $\sigma(\chi)$ ve tvaru

(2.116) $$\sigma(\chi) = \frac{b_0^2}{4}\frac{1}{\sin^4\frac{\chi}{2}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \mu^2 g^4}\frac{1}{4\sin^4\frac{\chi}{2}}.$$

Toto je ale takzvaná Rutherfordova formule, kterou je možno získat ve stejném tvaru i na základě úvah kvantové mechaniky.*)

Z (2.116) je zřejmé, že $\sigma(\chi)$ nezávisí na znaménku náboje částic; platí tedy jak pro případ sil odpudivých, tak i pro případ sil přitažlivých. Z úvah, které se týkaly

*) Podrobněji o tom viz L. D. Landau, E. M. Lifšic: Kvantovaja mechanika. op. cit.



Problém je s určením σ_c
Problém srážek na velkou vzdálenost

$$\sigma_c(v) = \int\sigma(\chi)\, d\Omega = 2\pi\int\sigma(\chi)\sin\chi\, d\chi = 2\pi\int b\, db$$

Rozdělovací funkce

$$f(\vec{r},\vec{v},t)$$

Počet částic se sour. r,v,t v drdv

$$f(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{r}d\vec{v}$$

$$fd\vec{r}d\vec{v}$$

Koncentrace částic $n(\vec{r},t)$

Střední rychlost částic $v_0(\vec{r},t)$

Tok veličiny jednotkovou ploch. pohybující se rychl. v_0

$$\Psi = \overline{\psi} = \int \psi(\vec{V})\vec{V}fd\vec{V}$$

kde integrací se míní integrace přes celý rychlostní prostor a přes objem, ve kterém je daný systém uzavřen. Potom střední hodnota funkce $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ je dána výrazem

(3.2) $$\bar{g} = \frac{1}{N}\iint g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\, f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,.$$

Podobně pro lokální střední hodnotu (střední hodnotu, která se může obecně měnit v prostoru od bodu k bodu) funkce $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ dostáváme

(3.3) $$\overline{g(\boldsymbol{r}, t)} = \frac{1}{n}\int g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\, f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,,$$

kde

(3.4) $$n(\boldsymbol{r}, t) = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

je koncentrace částic v místě $\boldsymbol{r}$; $n(\boldsymbol{r}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je potom počet částic v objemu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r}$.*)

Pomocí definice (3.3) můžeme nyní zavést některé důležité veličiny, které budou pro nás v dalším textu nepostradatelné.

Tak například střední rychlost částic v bodě $(\boldsymbol{r}, t)$ $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ bude podle (3.3) dána vztahem

(3.5) $$\bar{\boldsymbol{v}}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n}\int \boldsymbol{v}\, f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,.$$

Velmi často bývá výhodné vztahovat rychlost částic ke střední rychlosti $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$; zavedeme tedy pojem relativní rychlosti $\boldsymbol{V}$ vzhledem ke střední rychlosti $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ vztahem

(3.6) $$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)\,.$$

Potom s ohledem na definici $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ (3.5) je zřejmé, že

(3.7) $$\overline{\boldsymbol{V}} = \bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = 0\,.$$

V systému, který není v rovnovážném stavu, existuje jistý počet gradientů, jako například koncentrace, relativní rychlosti, teploty atd., které způsobují přenos hmotnosti, impulsu, teploty a dalších veličin, jež charakterizují vlastnosti částic daného systému. Označíme-li tyto veličiny jako $\psi(\boldsymbol{v})$, pak tok veličiny ψ jednotkovou plochou, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ **) za jednotku času bude zřejmě roven

(3.8) $$\Psi = \bar{\psi} = \int \psi(\boldsymbol{V})\, \boldsymbol{V} f\, \mathrm{d}\boldsymbol{V}\,.$$

*) Pro jednoduchost zápisu budeme místo „v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r}$" říkat „v bodě $\boldsymbol{r}$".

**) V dalším textu budeme vždy uvažovat tok plochou, která je v klidu vzhledem ke střední rychlosti částic systému.

Example of the calculation

Budeme-li dále předpokládat, že pro $|\boldsymbol{r}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{r}_j) \to 0$ a pro $|\boldsymbol{p}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{p}_j) \to 0$, dostaneme integrací per partes relace

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

S+1

kde

(1.53)
$$H_s = \sum_{i=1}^{s} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{s} \Phi_{ij}$$

je Hamiltonova funkce uzavřeného systému s částic.

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí

F_s je funkci F_{s+1} → soustava rovnic

Zákony zachování – řešení B.

- A

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
Chemical Physics Letters 372 (2003) 728–732
CHEMICAL PHYSICS LETTERS
www.elsevier.com/locate/cplett

The influence of electron–electron collisions on electron thermalization in He and Ar afterglow plasmas

D. Trunec [a,*], P. Španěl [b], D. Smith [c]

[a] *Department of Physical Electronics, Faculty of Science, Masaryk University, Kotlářská 2, 611 37 Brno, Czech Republic*
[b] *J. Heyrovsky Institute of Physical Chemistry, Academy of Sciences of the Czech Republic, Dolejškova 3, 182 23 Prague 8, Czech Republic*
[c] *Centre for Science and Technology in Medicine, School of Postgraduate Medicine, Keele University, Thornburrow Drive, Hartshill, Stoke-on-Trent ST4 7QB, UK*

Received 6 January 2003; in final form 18 March 2003

Abstract

The electron energy distribution functions for electron thermalization in helium and argon afterglow plasmas have been calculated taking into account electron–neutral and electron–electron collisions. This work shows that electron–electron collisions can lead to the Maxwellization of the electron energy distribution function and thus to different rates of electron thermalization.
© 2003 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Zákony zachování – řešení B.

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V}\sum_{i=1}^{s}\int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}$$

2. Boltzmann equation

The time rate of change of the electron distribution function, $f(v,t)$, is described by the Boltzmann equation [16]

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = C_{en} + C_{ee}, \qquad (1)$$

where C_{en} is the collision term for electron–neutral collisions

$$C_{en} = n_n \frac{m_e}{m_n}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^4\sigma_T(v)\left(f + \frac{kT_n}{m_e}\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) \qquad (2)$$

and C_{ee} is the collision term for electron–electron collisions

$$C_{ee} = \Gamma_{ee}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(I_0^0 f + (I_2^0 + J_{-1}^0)\frac{v}{3}\frac{\partial f}{\partial v}\right), \qquad (3)$$

$$I_p^0 = \frac{4\pi}{v^p}\int_0^v v^{2+p} f\,\mathrm{d}v,$$

$$J_p^0 = \frac{4\pi}{v^p}\int_v^\infty v^{2+p} f\,\mathrm{d}v,$$

$$\Gamma_{ee} = 4\pi\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e}\right)^2 \ln\Lambda,$$

where n_n is the number density of neutral gas, T_n is the gas temperature, m_n is the mass of neutral gas atoms and σ_T is the momentum transfer cross-section for electron–neutral collisions. $\Lambda = \lambda_D/b_0$ (λ_D is the Debye length, b_0 is the impact parameter for a 90° scattering). For our conditions (see below) $\ln\Lambda = 10$. As can be seen from Eq. (2), only elastic collisions are taken into account. The distribution function has the normalization

$$n_e = 4\pi\int_0^\infty v^2 f(v)\,\mathrm{d}v, \qquad (4)$$

so that the function

$$F(v) = \frac{4\pi v^2}{n_e} f(v)$$

is a velocity distribution function.

The initial distribution for the calculation was chosen as

$$f(v,0) = \frac{n_e}{4\pi k T_n\sqrt{\pi}}\frac{1}{v^2}\exp\left(-\left(\frac{v-v_0}{kT_n}\right)^2\right) \qquad (5)$$

with $v_0 = 1.19\times10^6$ ms^{-1}. This v_0 corresponds to electrons with energies in a narrow peak round 4 eV. The peak width is $2kT_n$.

Only collisional term

Zákony zachování – řešení B.

3.2. *Electron–neutral collisions*

Let us study first the energy relaxation due to electron–neutral collision only. For simplicity let us consider that the molecules of neutral gas are at rest ($T_n = 0$ K) and that the momentum transfer cross-section does not depend on the velocity, which is good approximation for helium.

Thus we obtain the equation

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = n_n \frac{m_e}{m_n} \sigma_T \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v}\left(v^4 f\right). \tag{6}$$

This equation can be solved analytically; the solution is

$$f(v,t) = \frac{1}{v^4} g\left(at - \frac{1}{v}\right), \tag{7}$$

where $a = n_n \frac{m_e}{m_n} \sigma_T$ and g is an arbitrary function, which must be determined from initial condition. For our initial condition (5) we obtain

$$f(v,t) = \frac{n_e}{4\pi k T_n \sqrt{\pi}} \frac{1}{v^2 (atv-1)^2} \times \exp\left(-\left(\frac{\frac{v}{atv-1} + v_0}{kT_n}\right)^2\right). \tag{8}$$

The time development of this distribution function is shown in Fig. 1.

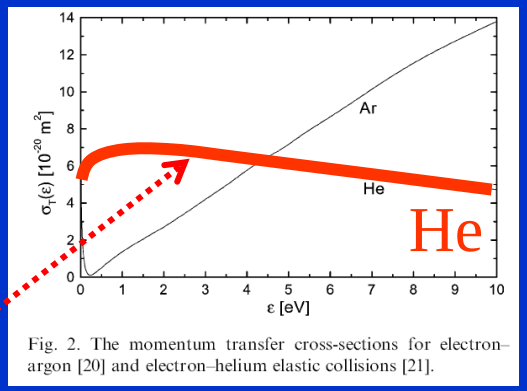


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron–argon [20] and electron–helium elastic collisions [21].

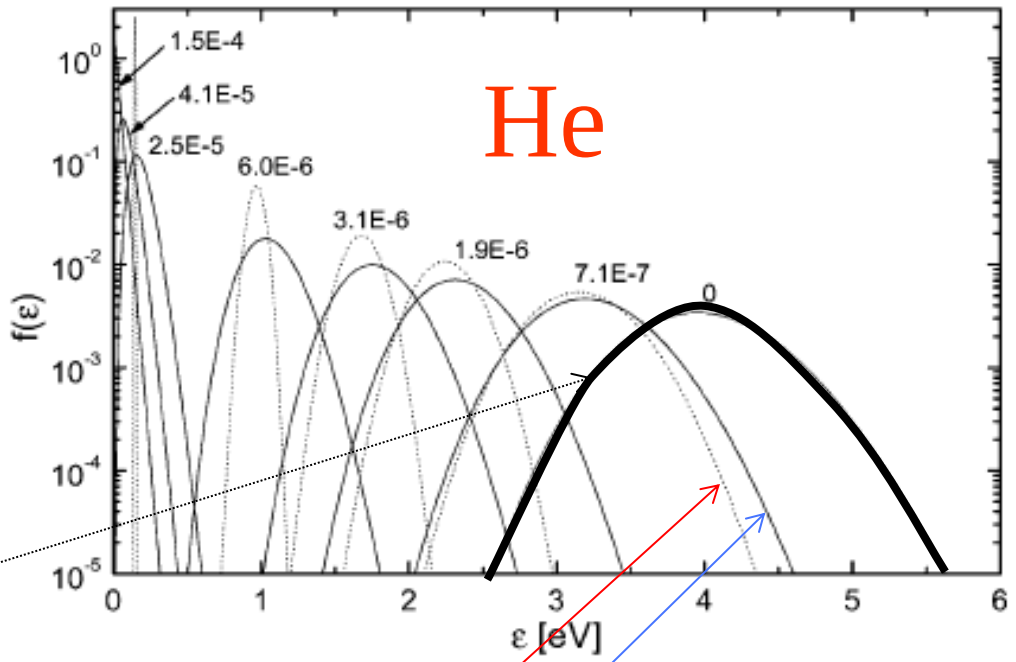


Fig. 1. The time dependence of the electron distribution function in helium afterglow plasma. The neutral gas number density is $n_n = 1.65 \times 10^{16}$ cm^{-3}, the neutral gas temperature: dotted line, $T_n = 0$ K; full line, $T_n = 293$ K. The time in seconds is given by the numbers near each curve. Electron–electron collisions are not taken in the account.

„Chlazení EEDF v He a v Ar“

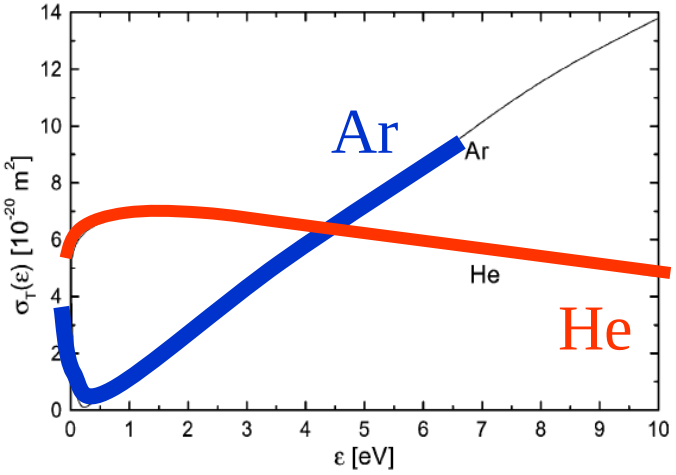


Fig. 2. The momentum transfer cross-sections for electron–argon [20] and electron–helium elastic collisions [21].

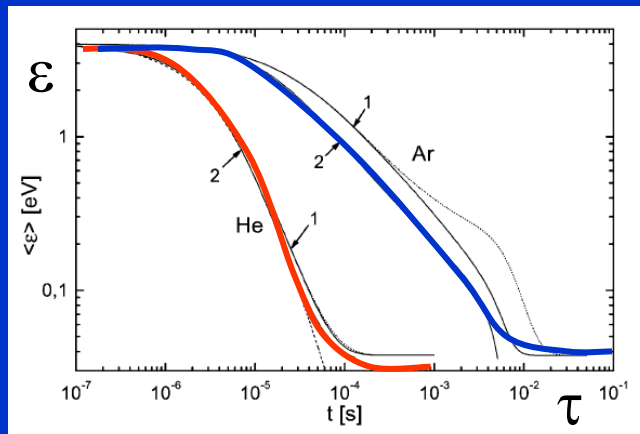


Fig. 5. The time dependence of the mean electron energy in helium and argon afterglow plasmas. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293$ K. Electron number densities: 1 – $n_e = 10^7$ cm^{-3} ($n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$), 2 – $n_e = 10^{10}$ cm^{-3} ($n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$). Dotted lines, calculations without electron–electron collisions; dashed line, calculation without electron–electron collisions and $T_n = 0$ K.

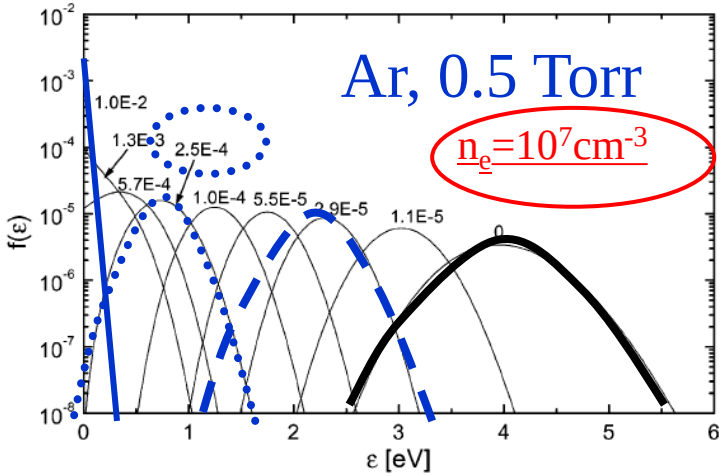


Fig. 3. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293$ K, the electron number density is $n_e = 10^7$ cm^{-3}, $n_e/n_n = 6 \times 10^{-10}$. The time in seconds is given by the numbers near each curve.

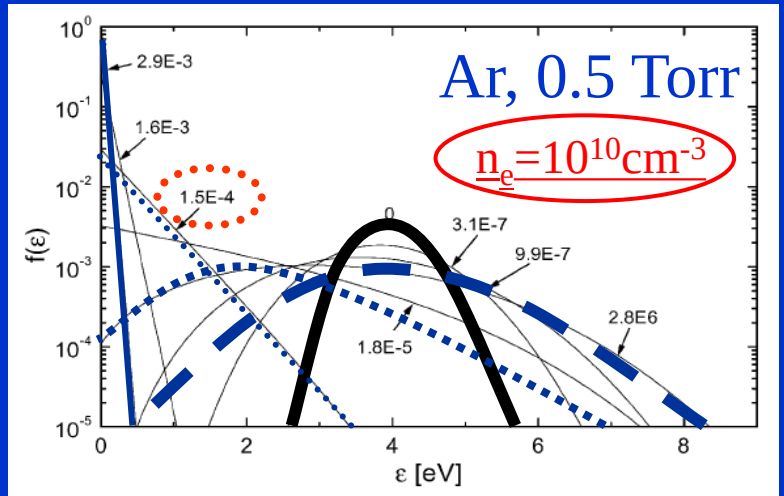


Fig. 4. The time dependence of the electron distribution function in argon afterglow plasma. The neutral gas pressure is 0.5 Torr, the neutral gas temperature is $T_n = 293$ K, the electron number density is $n_e = 10^{10}$ cm^{-3}, $n_e/n_n = 6 \times 10^{-7}$. The time in seconds is given by the numbers near each curve.

Velký Kracík

Odvození Boltzmannový rovnice

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$ působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i$ o velikosti $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + \mathrm{d}t$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$ a v rychlostním elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t$ (předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ za $\mathrm{d}t$). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

(3.32) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas $\mathrm{d}t$, musí zřejmě platit

(3.33) $$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t .$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

(3.34) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} .$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas $\mathrm{d}t$ (označí-

(1.15′) $$\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0 ,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$\int \mathrm{d}\Gamma = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N = \text{const},$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina… proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

(1.54) $$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$$

a pro $s = 2$ dostaneme

(1.55) $$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3 .$$

Taylorova rada pre funkciu G

$$G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X} . \nabla_A G$$

Debyeho stínící vzdálenost

- Debyeho stínící vzdálenost
- Potenciál kolem náboje v plazmě.

$\Delta\phi = -1/\varepsilon_0 \, e\Sigma Z_i n_i$

Plazma

$\Delta\phi = -1/\varepsilon_0 \, (Z_1 n_1 + Z_2 n_2)$

Uvážíme-li, že koncentrace jednotlivých složek plazmatu jsou dány Maxwellovým-Boltzmannovým zákonem:

$n_i = n_{i0} e^{-Z_i e\phi / kT_i}$

Dostaneme:

$$\Delta\phi = -e/\varepsilon_0 \, (Z_1 n_{10} \, e^{-Z_1 e\phi / kT_1} + Z_2 \, n_{20} \, e^{-Z_2 e\phi / kT_2})$$

Pro $Ze\phi \ll \kappa T$

$$\Delta\phi = -e/\varepsilon_0 \, \{(Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}) - \phi(Z_1^2 e^2 n_{10}/kT_1 + Z_2^2 e^2 n_{20}/kT_2)\}$$

$(Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}) = 0$

Debyeho stínící vzdálenost

- Debyeho stínící vzdálenost.
- Debyeovský poloměr

$$\Delta\phi = -e/\varepsilon_0 \{(Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}) - \phi(Z_1^2 e^2 n_{10}/kT_1 + Z_2^2 e^2 n_{20}/kT_2)\}$$

$(Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}) = 0$

$(Z_1^2 e^2 n_{10}/kT_1 + Z_2^2 e^2 n_{20}/kT_2) = l_d^2$

$$\Delta\phi = \phi/l_d^2$$

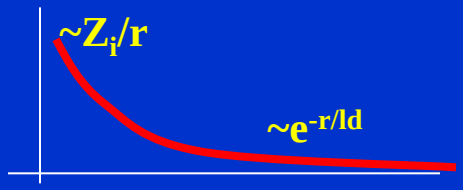
Vzhledem k symetrii problému….

$$1/r \, d^2(r\phi)/dr^2 = \phi/l_d^2$$

$$\phi(r) = 1/r(C_1 e^{-r/l_d} + C_2 e^{+r/l_d})$$

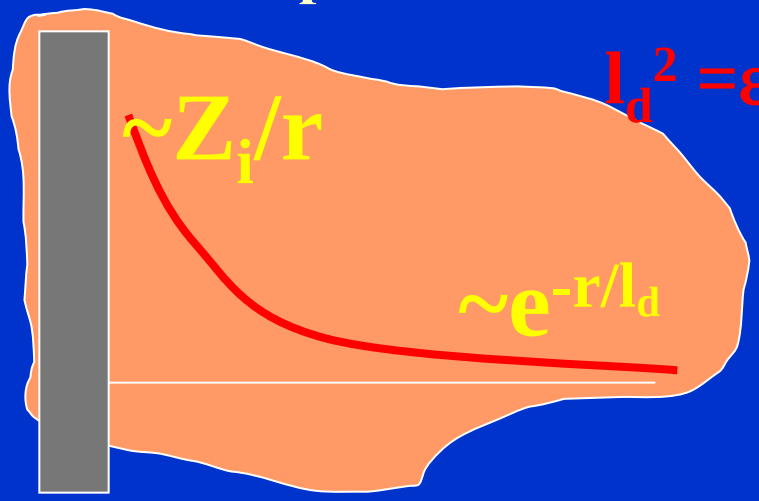
$\phi(inf)=0 \rightarrow C_2=0,$

$$\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r \; * e^{-r/l_d}$$



Stínění v plazmě

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění



$l_d^2 = \varepsilon_0 kT/ne^2$

$v^2 \sim kT/m_e$

$l_d^2 = kT/m_e * 1/\omega_{0e}^2 = v^2/\omega_{0e}^2$

$\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r * e^{-r/l_d}$

$\sigma_c(v) = 2\pi \int b\, db$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Tvar l_d (2.124) se značně zjednoduší, budeme-li předpokládat, že $Z_1^2 = Z_2^2 = 1$, $T_1 = T_2 = T$ a

(2.130) $$n_{10} + n_{20} = n\,, \qquad n_{10} \sim n_{20} \sim \tfrac{1}{2}n\,,$$

kde n je celkový počet částic v jednotce objemu. Potom, jak plyne z (2.124), je

(2.131) $$l_d^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}\,.$$

Uvážíme-li nyní, že Langmuirova frekvence (plazmová frekvence) ω_0 je dána výrazem

(2.132) $$\omega_0^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \sim \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e} = \omega_{0e}^2\,,$$

kde m_e je hmotnost elektronů a ω_{0e} je plazmová frekvence elektronů, můžeme také psát, že

(2.133) $$l_d^2 = \frac{kT}{m_e}\frac{1}{\omega_{0e}^2}\,.$$

Fyzikální význam této rovnice je celkem jasný. Rovnice (2.133) totiž říká, že l_d je taková délka, o kterou se přemístí částice (elektron) za periodu plazmových kmitů. Potom doba τ_{st}, za kterou se ustanoví debyeovské stínění, je řádově

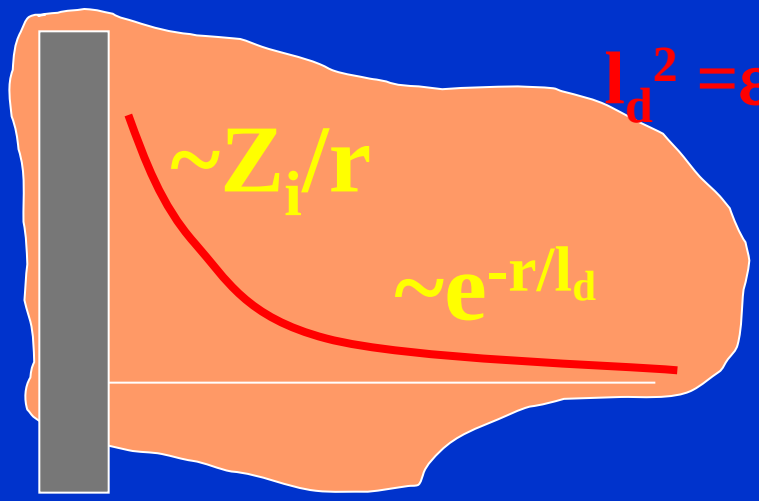
(2.134) $$\tau_{st} \sim \frac{1}{\omega_0} \sim \frac{l_d}{\sqrt{kT/m_e}}\,.$$

Na závěr tohoto odstavce je nutno poznamenat, že některé naše úvahy nejsou přesně vzato korektní. Týká se to především předpokladu, že rozložení částic kolem každého silového centra plazmatu je dáno sféricky symetrickým rozdělením Maxwella-Boltzmanna. Podrobnější analýza daného problému ukazuje*), že chyby, kterých se tímto jednoduchým popisem dopouštíme, jsou poměrně malé a navíc i tento jednoduchý popis vede k relativně dobrým výsledkům v další teorii plazmatu.

*) Viz např. D. V. Sivuchin: Voprosy těorii plazmy 4, red. M. A. Leontovič, Moskva (1964).

Ještě raz

- Stínění v plazmě
- Ustanovení debyovského stínění



$$\phi(r) = (Z_i e/4\pi\varepsilon_0)/r \; {}_* e^{-r/l_d}$$

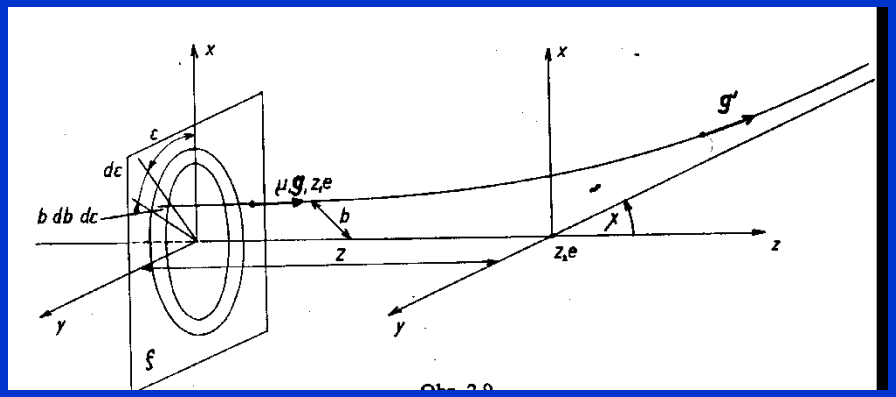
$$\sigma_c(v) = 2\pi \int b \, db$$

Problém srážek na velkou vzdálenost

Výpočet:

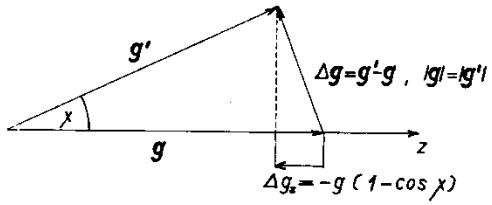
Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus



$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{(i)} p_{1i} = -\frac{g}{g}\mu\sum_{(i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_z\,,$$

kde suma přes i značí sečítání přes všechny částice svazku. Výraz $\sum_{(i)}(\mathrm{d}g_z/\mathrm{d}t)$ je možno celkem snadno určit: fyzikálně totiž znamená změnu relativní rychlosti svazku částic za jednotku času, nebo — což je totéž — změnu relativní rychlosti jedné částice svazku vlivem srážky, vynásobenou počtem srážek za jednotku času (předpokládáme, že interakci svazku můžeme rozdělit na jednotlivé binární srážky).



Obr. 2.10.

Změnu relativní rychlosti jedné částice svazku Δg_z určíme snadno z obr. 2.10. Snadno zjistíme, že

(2.136) $$\Delta g_z = -g(1-\cos\chi) = -2g\sin^2\frac{\chi}{2}.$$

Počet srážek za jednotku času závisí zřejmě na průřezu svazku; za jednotku času „dosáhnou" silového centra pouze ty částice, jejichž vzdálenost $Z \leqq g \,.\, 1$ sec. Počet částic, které projdou elementární plochou $b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon$ za jednotku času a „dosáhnou" silového centra, pak zřejmě bude

(2.137) $$g n_1 b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,,$$

kde n_1 je koncentrace částic svazku. Vynásobíme-li nyní (2.136) výrazem (2.137) a zintegrujeme-li výsledek přes celou rovinu ξ, dostaneme, že

(2.138) $$\sum_{(i)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_z = \int_0^\infty \mathrm{d}b\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varepsilon\left(-2g\sin^2\frac{\chi}{2}g n_1 b\right)$$

a odtud

(2.139) $$F = \frac{g}{g}2g^2 n_1\mu\,2\pi\int_0^\infty b\sin^2\frac{\chi}{2}\,\mathrm{d}b\,.$$

Uvážíme-li nyní, že podle (2.106) $\mathrm{tg}\,\chi/2 = b_0/b$, můžeme dále psát, že

(2.140) $$F = \frac{g}{g}\mu\,4\pi n_1 g^2 b_0^2\int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2+b^2}\,.$$

Integrál

(2.141) $$L = \int_0^\infty\frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2+b^2}$$

Zvláštnosti coulombovského rozptylu

- Coulombovský rozptyl
- Coulombovský logaritmus

$$F = \frac{g}{g}\,\mu\,4\pi n_1 g^2 b_0^2 \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}\,.$$

$$L = \int_0^\infty \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2}$$

ln(E.kinetická/E.potenciální)
Ve vzdalenosti l_d

logaritmicky diverguje pro velké hodnoty parametru b. Abychom dostali pro F konečné hodnoty, musíme v L nějakým způsobem omezit horní integrační mez.

V předchozím odstavci jsme si ukázali, že efektivní interakční potenciál částic je řádově dosahu l_d; binární coulombovské srážky je pak možno uvažovat pouze pro srážkový parametr $b \leqq l_d$. Za horní integrační mez L je tedy možno zvolit l_d. Dostaneme

(2.142) $$L = \int_0^{l_d} \frac{b\,\mathrm{d}b}{b_0^2 + b^2} = \ln \sqrt{\left(\frac{b_0^2 + l_d^2}{b_0^2}\right)}\,.$$

Jestliže dále platí, že $l_d \gg |b_0|$, můžeme (2.142) přepsat do tvaru

(2.143) $$L = \ln\left(\frac{l_d}{|b_0|}\right) = \ln \frac{l_d}{\dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}}\,,$$

kde jsme za b_0 dosadili (2.97) a síla F, určená rovnicí (2.140), má nyní tvar

(2.144) $$F = L \frac{g}{g^3} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{n_1}{\mu}\,.$$

Veličina L určená rovnicí (2.143) se nazývá coulombovský logaritmus.

Předpokládali jsme, že platí

(2.145) $$l_d \gg b_0\,.$$

Tato podmínka však plyne přímo z předpokladů (2.120), které mají platit pro libovolné r. Položme tedy $r = l_d$ a předpokládejme pro jednoduchost, že $Z_1 = Z_2 = 1$. Sečtením nerovností (2.120) ($\varphi(r)$ bereme v prvním přiblížení jako coulombovský) dostaneme

(2.146) $$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{l_d} \ll k(T_1 + T_2)\,,$$

což je možno přepsat jako

(2.147) $$l_d \gg \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 k(T_1 + T_2)}\,.$$

Protože ale $3k(T_1 + T_2) \sim \mu g^2$, je možno (2.147) dále přepsat na

(2.148) $$l_d \gg \frac{6e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2} \sim b_0\,.$$

Odtud již vidíme, že nerovnost (2.145) je již splněna, platí-li (2.120), nebo jinými slovy, předpokládáme (stejně jako v 1. kapitole), že interakční energie částic je mnohem menší ve srovnání s jejich tepelnou energií. K tomuto výsledku je možno dojít ještě trochu jiným způsobem. Aby „ořezání“ integrálu L(2.141) mělo fyzikální smysl,

Další kroky

- Shrňte, co se od účastníků očekává.
- Shrňte, co se očekává od vás.