Řešení Boltzmannovy rovnice

Odvození Boltzmannový rovnice

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$, působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i$ o velikosti $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + \mathrm{d}t$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$ a v rychlostním elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t$ (předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ za $\mathrm{d}t$). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

(3.32) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas $\mathrm{d}t$, musí zřejmě platit

(3.33) $$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t .$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

(3.34) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} .$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas $\mathrm{d}t$ (označí-

Taylorova rada pre funkciu G

$$G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X}.\nabla_A G$$

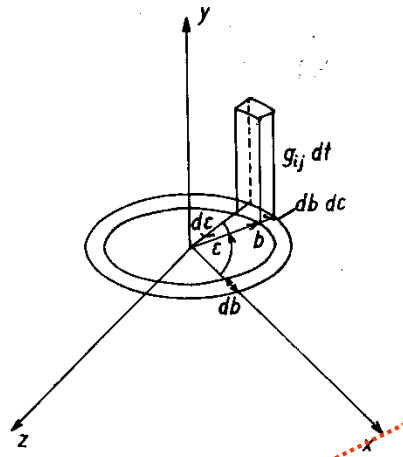
me $\sum_j A_{ij}^+ \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$), minus počet částic i-tého druhu, které tento objemový element opustí vlivem srážek s ostatními druhy částic za stejný časový interval dt (označíme $\sum_j A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$). Symbolicky tedy můžeme psát

$$\frac{\delta_e f_i}{\delta t} \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = \sum_j (A_{ij}^+ - A_{ij}^-) \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \,, \tag{3.35}$$

kde sečítáme přes všechny druhy částic.

Věnujme se nejdříve členu $A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$. Nechť částice i-tého druhu je umístěna v bodě $\boldsymbol{r}$ a nechť se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. Spočteme pravděpodobnost toho, že tato částice se za dobu dt srazí s částicí j-tého druhu. Elastická srážka dvou částic je ve válcových souřadnicích charakterizována relativní rychlostí těchto částic $g_{ij} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$, srážkovým parametrem b a úhlem ε mezi rovinou trajektorie a libovolnou rovinou referenční (viz kapitolu 2). Počet srážek částice i-tého druhu za čas dt s částicemi j-tého druhu, jejichž relativní rychlost je g_{ij}, srážkový parametr je v mezích b, $b + db$ a úhel v mezích ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ potom bude roven počtu částic j-tého druhu, které jsou obsaženy v objemovém elementu

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$



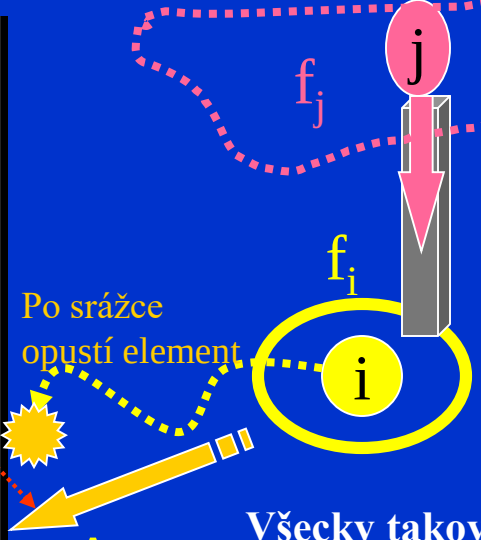
Obr. 3.1.

(viz obr. 3.1). Vzhledem k definici $f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)$ je tento počet částic roven výrazu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt \,.$$

Celkový počet srážek částice i-tého druhu se všemi částicemi druhu j-tého za čas dt potom zřejmě bude

$$\dot{A}_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt = d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j \,. \tag{3.36}$$



Velký Kracík

"Objemový" element

$$g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Počet částic v elementu

$$f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dt$$

Všecky takové j-té částice narazí do i-té částice v počátku

$$dt \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t) \, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, d\boldsymbol{v}_j$$

i-tych částice v elementu je:

$$f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i .$$

$d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i$, je $A_{ij}^- \, d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{v}_i \, dt$

Počet srážek = počet částic, které opustí element $drdv_i$ je :

Velký Kracik pokračování

$$A_{ij}^{-}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

$$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

$$g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'$$

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

(3.42) $$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

Srážkový člen

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

Ukážeme, že pro některé funkce -invarianty

$$\Psi = 1\,, \qquad \Theta = m\boldsymbol{v}\,, \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2\,,$$

Je

$$\iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

(3.53)
$$n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$
$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$
$$+ \sum_{j \neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

(3.54)
$$\iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,.$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

(3.55)
$$\iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b' \, \mathrm{d}b' \, \mathrm{d}\varepsilon' \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j' \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

Srážkový člen – odstrašující příklad ale ten výsledek

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

Výsledek

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

$$(3.53)\qquad n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_t \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j\neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$

$$+ \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

$$(3.55)\qquad \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' ,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice na základě platnosti (3.57). Provedeme-li nyní záměnu i za j, je pravá strana (3.61) rovna také výrazu

$$(3.62)\qquad \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint (\Phi_j - \Phi_j')\,(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i ,$$

který za pomoci (3.61) dává závěrečný vztah, že

$$(3.63)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_i \sum_{j\neq i} \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_j - \Phi_i' - \Phi_j')\,(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Vrátíme-li se nyní k některým úvahám, které se týkají teorie binárních elastických srážek (viz kapitolu 2), vidíme, že existuje jistý počet funkcí Φ_i, pro které platí

$$(3.64)\qquad \delta\bar{\Phi}_i = 0 .$$

Tyto funkce se nazývají srážkové invarianty a budou zřejmě funkcemi hybnosti a energie částic, neboť tyto veličiny se během srážek zachovávají. Jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), můžeme přijmout $\Phi_i = 1$, což nám vlastně vyjadřuje podmínku, že během srážky částice neopouští objemový element $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Protože během binárních srážek platí zákon zachování hmoty, můžeme také jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), přijmout $\Phi_i = m_i$, což je v podstatě úplně ekvivalentní $\Phi_i = 1$.

Jestliže je systém tvořen stejnými částicemi, máme pět srážkových invariantů

$$(3.65)\qquad \Psi = 1 , \qquad \boldsymbol{\Theta} = m\boldsymbol{v} , \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2 ,$$

které, vzhledem k platnosti (3.60), splňují (3.64).

Poněkud jiná situace nastane, jestliže systém bude tvořen několika druhy částic. Zde musíme rozlišovat dva případy:

a) Jestliže $\Psi_i = 1$, potom podle rovnice (3.57) platí, že

$$(3.66)\qquad \iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

a tedy tento případ je úplně obdobný případu předchozímu.

b) Jestliže ale

$$(3.67)\qquad \boldsymbol{\Theta}_i = m_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{a} \quad \Sigma_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 ,$$

pak již není možno zobecnit (3.66) do té míry, že bychom nahradili Ψ_i funkcemi $\boldsymbol{\Theta}_i$

Maxwelova rozdělovací funkce

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f'f'^{(1)} - ff^{(1)})\, gb\, db\, d\varepsilon\, dv^{(1)}$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

Dále $\partial H/\partial t = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže

(3.74) $$f'f'^{(1)} = ff^{(1)} .$$

Podle rovnice (3.70) je pak ale $\partial f/\partial t = 0$, a proto podmínka (3.74) odpovídá rovnovážnému stavu.

Na základě rovnosti (3.74) můžeme nyní určit tvar rozdělovací funkce systému, který je v rovnováze. Podle (3.74) můžeme totiž psát

(3.75) $$\ln f' + \ln f'^{(1)} = \ln f + \ln f^{(1)} ,$$

tj. logaritmus rovnovážné rozdělovací funkce je srážkovým invariantem našeho systému. Podle našich předchozích úvah (viz str. 80) musí tedy být $\ln f$ lineární kombinací srážkových invariantů (3.65), tj.

(3.76) $$\ln f = a\boldsymbol{m} + \boldsymbol{b} \,.\, m\boldsymbol{v} + c\,\tfrac{1}{2}mv^2 ,$$

kde konstanty a, $\boldsymbol{b}$ a c závisí na celkovém počtu částic, celkovém impulsu a celkové energii systému. Abychom určili tyto konstanty, přepišme (3.76) do tvaru

(3.77) $$\ln f = \ln a_0 - c\,\tfrac{1}{2}m[(v_x - b_x/c)^2 + (v_y - b_y/c)^2 + (v_z - b_z/c)^2] .$$

Položíme-li nyní

(3.78) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{c} ,$$

dostaneme z (3.77), že

(3.79) $$f = a_0 \exp\left(-c\,\tfrac{1}{2}mV'^2\right) .$$

Z normovací podmínky (3.4) dále máme

(3.80) $$n = \int f\, d\boldsymbol{v} = a_0 \int \exp\left(-\frac{c}{2}mV'^2\right) d\boldsymbol{V}' = a_0 \left(\frac{2\pi}{mc}\right)^{3/2} .$$

Podobně

(3.81) $$n\boldsymbol{v}_0 = \int \boldsymbol{v} f\, d\boldsymbol{v} = \int \left(\boldsymbol{V}' + \frac{\boldsymbol{b}}{c}\right) f\, d\boldsymbol{V}' = n\frac{\boldsymbol{b}}{c} ,$$

protože $\int \boldsymbol{V}' f\, d\boldsymbol{V}' = 0$; můžeme tedy psát, že

(3.82) $$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{b}}{c}$$

a tedy

(3.83) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V} .$$

(3.5) $$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n}\int \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\, d\boldsymbol{v} .$$

(3.6) $$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) .$$

Dále podle (3.80) a (3.83) platí

(3.84) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \frac{m}{2n}\int V^2 f\, d\boldsymbol{v} = \frac{m}{2n}\, a_0 \int V^2 \exp\left(-\frac{c}{2}mV^2\right) d\boldsymbol{V} = \tfrac{3}{2}c^{-1} .$$

S ohledem na definici $\boldsymbol{V}$ (3.6) je ale zřejmé, že

(3.85) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \tfrac{3}{2}kT$$

a tedy

(3.86) $$c = \frac{1}{kT} ,$$

kde k je Boltzmannova konstanta a T kinetická teplota plynu. Spojením předchozích výsledků dostáváme nyní rozdělovací funkci f ve tvaru

(3.87) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) .$$

$\int f\, d\boldsymbol{v}$

Tato rozdělovací funkce se nazývá Maxwellovou rozdělovací funkcí a systém, jehož stav je takovouto funkcí popsán, se nazývá maxwellovský systém.

Podle obecné definice rozdělovací funkce je $f\, d\boldsymbol{v}$ počet částic v jednotkovém objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. V některých případech je ale vhodné znát počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu $V, V + dV$, tj. zajímáme se pouze o absolutní hodnotu rychlosti a ne o směr. Zavedením sférických souřadnic (V, ϑ, φ) snadno získáme, že

(3.88) $$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{V} = V^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dV$$

a odtud integrací přes ϑ a φ pak dostaneme, že počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží mezi V a $V + dV$, je dán vztahem

(3.89) $$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) dV .$$

Pomocí takto zapsaného rozdělení můžeme nyní snadno určit střední hodnotu nějaké fyzikální veličiny, která nezávisí na směru rychlosti.

Tak např.

(3.90) $$\overline{V} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty V^3 e^{-(mV^2/2kT)}\, dV = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$$

a podobně

(3.91) $$\overline{V^2} = \frac{3kT}{m} .$$

Maxwelova rozdělovací funkce

- Potenciálové pole

$$\delta H / \delta t = 0$$

Rovnováha, to je strašne silné

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

(3.99) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right),$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$. Potom

(3.100) $$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

(3.101) $$v \,.\, \nabla_r f + \frac{F}{m} \,.\, \nabla_v f = 0 \,.$$

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \,.\, \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \,.\, \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dv_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

=0 =0

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

(3.102) $$v \,.\, \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T} v \,.\, \nabla_r T - \frac{F}{kT} \,.\, v = 0 \,.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\nabla_r T = 0$$

To iba ukazuje, že to nemá vnútorný rozpor

rovnováha… termodynamická rovnováha ???

a

(3.104) $$\nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0 \,.$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

(3.105) $$F = kT \nabla_r \left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ $(F = -\nabla_r \Phi)$, pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),$$

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right) dv$$

To všetko v rovnováhe

Tomu třeba rozumieť tak, aby sme to dokázali používať???

Maxwellovy transportní rovnice – Rovnice přenosu

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

(3.117) $$\int \left\{ \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_v f_i \right) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

(3.118) $$\int \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\Phi}_i) - n_i \left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

(3.119) $$\int \Phi_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \cdot \int \Phi_i \boldsymbol{v} f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int (\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i) f_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \nabla_r \cdot (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i (\overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i})$$

atd.

Maxwellovy transportní rovnice – Rovnice přenosu

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

$$(3.117)\qquad \int\left\{\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i\right)\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

$$(3.118)\qquad \int \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\frac{\partial f_i}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial t}\int \Phi_i f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(n_i \overline{\Phi}_i) - n_i\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

$$(3.119)\qquad \int \Phi_i \boldsymbol{v} \,.\, \nabla_r f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \,.\, \int \Phi_i \boldsymbol{v} f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int (\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i) f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \nabla_r \,.\, (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i \overline{(\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i)}$$

atd.

a konečně třetí člen je možno upravit zcela analogicky, tj.

$$(3.120)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int \Phi_i \frac{\partial f_i}{\partial v_{ix}}\,\mathrm{d}v_{ix}\,\mathrm{d}v_{iy}\,\mathrm{d}v_{iz} + \ldots =$$

$$= \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int \frac{\partial}{\partial v_{ix}}(\Phi_i f_i)\,\mathrm{d}v_{ix}\,\mathrm{d}v_{iy}\,\mathrm{d}v_{iz} - \iint \frac{F_{ix}}{m_i} \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial v_{ix}}\,\mathrm{d}v_{ix}\,\mathrm{d}v_{iy}\,\mathrm{d}v_{iz} + \ldots ;$$

protože $\lim_{v_i \to \pm\infty} (\Phi_i f_i) = 0$, je možno dále psát

$$(3.121)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -\int \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v \Phi_i f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -\, n_i \left(\overline{\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v \Phi_i}\right).$$

Jestliže $\boldsymbol{F}_i$ nezávisí na rychlosti, je možno $\boldsymbol{F}_i/m_i$ vyjmout před integrál a (3.121) má pak tvar

$$(3.122)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -\, n_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, (\overline{\nabla_v \Phi_i}) \,.$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\qquad \frac{\partial (n_i \overline{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \,.\, (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i \left[\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \,.\, \nabla_v \Phi_i} + \overline{\delta \Phi_i}\right] = 0 \,.$$

Rovnice (3.123) je obecnou rovnicí přenosu pro danou veličinu Φ_i, nazývá se Maxwellovou transportní rovnicí. Sumací (3.123) přes všechny druhy částic daného systému pak dostaneme rovnici přenosu pro veličinu Φ celého systému.

Maxwellovy transportní rovnice – Zákony zachování

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r\Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v\Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0\,.$$

Rovnice (3.123) je obecnou rovnicí přenosu pro danou veličinu Φ_i, nazývá se Maxwellovou transportní rovnicí. Sumací (3.123) přes všechny druhy částic daného systému pak dostaneme rovnici přenosu pro veličinu Φ celého systému.

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednočásticový systém*) a nechť funkce Φ je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

a) $\Phi = \Psi = 1$.

Potom $\bar{\Psi} = 1$, $\overline{\Psi \boldsymbol{V}} = \mathrm{D}\Psi/\mathrm{D}t = \nabla_r\Psi = \nabla_v\Psi = \delta\bar{\Psi} = 0$ a z (3.129) dostaneme

$$(3.131)\qquad \frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + n\,\nabla_r \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0\,.$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r\Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v\Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0\,.$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n\boldsymbol{v}_0) = 0\,,$$

Pro i-te částice

Transportní rovnice pro plazma

- E … B pole
- F není elektr. původu

■ Plazma,Předpoklady

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$\frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i\left[\left(\frac{\overline{\partial\Phi_i}}{\partial t}\right) + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0 \,. \tag{3.123}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n\boldsymbol{v}_0) = 0 \,,$$

Pro i-te částice

Jednočasticový systém….

3.7 Úprava transportních rovnic pro plazma

Rovnice (3.188), (3.189), (3.191) a (3.192) platí obecně pro vícesložkové plazma. Jsou však velmi složité, a proto se k praktickému řešení konkrétních úloh příliš nehodí. Upravíme proto tyto rovnice na základě některých předpokladů na přijatelnější a známější tvar. Předpokládejme, že*):

a) Plazma je kvasineutrální, tj.

$$\sigma_e \sim 0 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{j} \,. \tag{3.194}$$

Prostorový náboj σ_e můžeme zanedbat v pohybové rovnici (3.187) resp. (3.188) a v rovnici pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (3.189). σ_e však není možno zanedbat v Poissonově rovnici.

b) Hmotnost elektronů m_e je mnohem menší ve srovnání s hmotností iontů m_i, tj.

$$\frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad \text{a také} \quad \frac{Z_i m_e}{m_i} \ll 1 \,. \tag{3.195}$$

c) Plazma je téměř izotropní a $\boldsymbol{v}_0$ je dostatečně malé, tj. elektrický proud $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_0$ a tlakové gradienty jsou poruchy prvního řádu a proto členy, obsahující tyto veličiny ve druhé mocnině, stejně tak jako gradienty $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{v}_0$ můžeme zanedbat.

d) Plazma není daleko od termodynamické rovnováhy, tj. parciální tlaky elektronů $\mathbf{p}_e$ a iontů $\mathbf{p}_i$ jsou téhož řádu; podle b) pak také platí

$$\frac{Z_i m_e}{m_i}\mathbf{p}_i \ll \mathbf{p}_e \,, \tag{3.196}$$

????

Neplati pro výboje ??

což znamená, že elektrokinetický tenzor iontů je zanedbatelný ve srovnání s elektrokinetickým tenzorem elektronů.

e) Tenzor $\mathbf{p}$ nahradíme skalárním tlakem $p = p_e + p_i$.

f) Plazma je dvousložkové; je tvořeno elektrony a ionty.

Na základě těchto předpokladů můžeme dále psát, že

$$n_i Z_i \cong n_e = n \tag{3.197}$$

$$\varrho = m_e n_e + m_i n_i \sim \varrho_i \,, \tag{3.198}$$

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{\varrho}(\varrho_i \bar{\boldsymbol{v}}_i + \varrho_e \bar{\boldsymbol{v}}_e) \cong \bar{\boldsymbol{v}}_i \,. \tag{3.199}$$

Dále

$$\boldsymbol{j} = Z_i e n_i \overline{\boldsymbol{V}}_i - e n_e \overline{\boldsymbol{V}}_e \cong Z_i e n_i \bar{\boldsymbol{v}}_i - e n_e \bar{\boldsymbol{v}}_e \,; \tag{3.200}$$

potom

$$n_e \bar{\boldsymbol{v}}_e = Z_i n_i \bar{\boldsymbol{v}}_i - \frac{\boldsymbol{j}}{e} \cong \frac{Z_i}{m_i}\varrho \boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{j}}{e} \,. \tag{3.201}$$

Na základě výše uvedených předpokladů můžeme psát:

a) Pro jednotlivé složky plazmatu:

1) Rovnici kontinuity

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{m_i}\nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0 \,, \tag{3.202}$$

Pro ionty

Pro elektrony

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i}\nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 \,. \tag{3.203}$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

$$\nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0 \,; \tag{3.204}$$

potom můžeme psát

Pro elektrony

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 \,. \tag{3.203'}$$

Transportní rovnice pro plazma

(3.203) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i} \nabla_r . (\varrho v_0) + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

(3.204) $$\nabla_r . (\varrho v_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

(3.203′) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

(3.123) $$\frac{\partial (n_i \bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r . (n_i \overline{\Phi_i v_i}) - n_i \left[\left(\frac{\overline{\partial \Phi_i}}{\partial t} \right) + \overline{v_i . \nabla_r \Phi_i} + \frac{\overline{F_i(v_i)}}{m_i} . \nabla_v \Phi_i + \delta \bar{\Phi}_i \right] = 0 .$$

$$\Phi_i = m_i V_i .$$

2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

(3.205) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) ,$$

(3.206) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + v_e \times B) - n_e F_e = n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) .$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen $n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i)$, resp. $n_e \delta_i(m_e V_e)$. Podle (3.158) ale platí

(3.207) $$n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) + n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = 0 \quad \text{tj.}$$

$$n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i)$$

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

V některých případech je možno předpokládat, že*)

(3.208) $$n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{V}_e - \bar{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

Tu je chyba

(3.205′) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

(3.206′) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) .$$

(3.158) $$\sum_i n_i \delta(\bar{\Phi}_i) = \sum_i n_i \sum_{j \neq i} \delta_j(\bar{\Phi}_i) = 0 .$$

Treba postupovať veľmi opatrne z hľadiska zameny iont ← → neutrálna častica

Součet hybnosti v těžiskove soustavě, jenom e a i

Zmena hybnosti při zrážke ~ hybnost el.

Ľahka gulička zmení „relatívnu rychlosť“

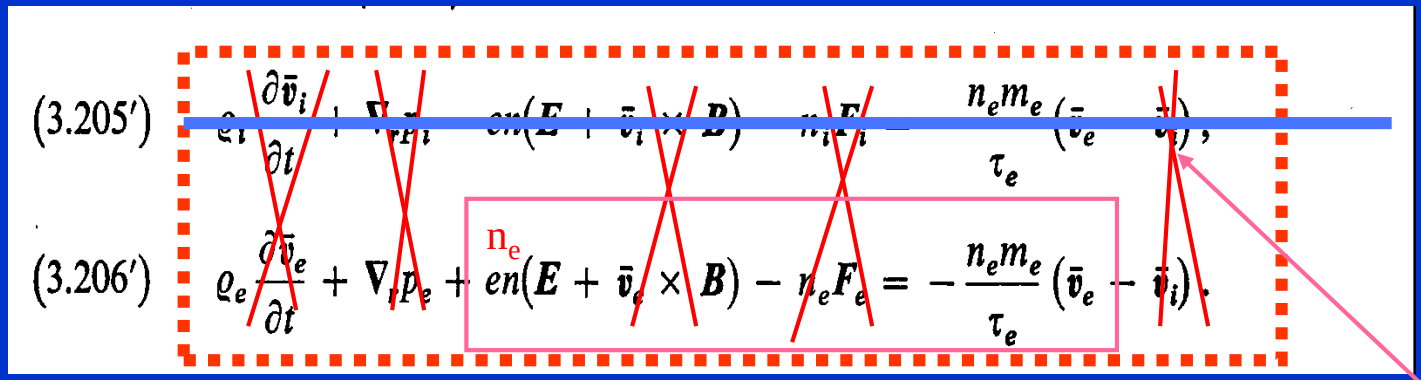
Změna při přechodu na neutrální plyn různých koncentracich…. Ale rovnost ve změně hybnosti zůstane … není to triviální

Je to pre stredné hodnoty rýchlosti

Mohli by sme to chápať jako častice i-tého druhu, rovnica zachovania hybnosti … by platili

Interpretace transportní rovnice pro plazma

- Pohyb elektronů v elektrickém poli



$$(3.205') \quad \varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_i p_i - en(\boldsymbol{E} + \bar{v}_i \times \boldsymbol{B}) - n_i \boldsymbol{F}_i = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i),$$

$$(3.206') \quad \varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_i p_e + en(\boldsymbol{E} + \bar{v}_e \times \boldsymbol{B}) - n_e \boldsymbol{F}_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i).$$

n_e

$$en_eE = n_e m_e \underline{v}_e / \tau_e$$

Neglected ion velocity

Electron-ion

$$J_e = en_e\underline{v}_e = (e^2 n_e \tau_e / m_e) \cdot E$$

vodivost

Electron/ion plasma

Electron/ion/neutral plasma

Doležité bolo, že jedné sú ťažké a elektrony ľahké ….

Treba postupovať veľmi opatrne z hľadiska zameny iont ← → neutrálna častica

Transportní rovnice pro plazma – vodivost – zobecněný Ohmův zákon

b) Pro systém nabitých částic (plazma jako celek):

1) Rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0 , \tag{3.209}$$

zákon zachování náboje

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} + \nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 . \tag{3.210}$$

2) Pohybovou rovnici (zákon zachování impulsu)

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} = -\nabla_r p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} + \sum_k n_k \boldsymbol{F}_k . \tag{3.211}$$

3) Rovnici pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \sum_k \frac{Z_k e}{m_k} n_k \boldsymbol{F}_k = \tag{3.212}$$

$$= \frac{Z_i e n_i}{m_i}\delta_e(m_i \overline{V}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \overline{V}_e) ,$$

protože podle (3.199) a (3.201) platí

$$\sum_k \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\bar{\boldsymbol{v}}_k = \frac{e^2}{m_e}\left[n_e \bar{\boldsymbol{v}}_e + \frac{Z_i^2 n_i m_e}{m_i}\bar{\boldsymbol{v}}_i\right] \cong \tag{3.213}$$

$$\cong \frac{e^2}{m_e}\left[-\frac{\boldsymbol{j}}{e} + \boldsymbol{v}_0 Z_i n_i\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\right] \cong \frac{e^2}{m_e}\left(n_e \boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{j}}{e}\right).$$

Pravou stranu (3.212) můžeme ještě dále upravit, protože (3.208) můžeme psát jako

$$n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\overline{V}_e - \overline{V}_i) \cong +\frac{m_e}{\tau_e e}\boldsymbol{j} . \tag{3.214}$$

Potom ale můžeme psát, že

$$\frac{Z_i e n_i}{m_i}\delta_e(m_i \overline{V}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \overline{V}_e) = -\frac{e n_e}{m_e}\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\delta_i(m_e \overline{V}_e) \cong \tag{3.215}$$

$$\cong -\frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \overline{V}_e) \cong -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e}$$

a rovnice pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (zobecněný Ohmův zákon) má nyní tvar

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \tag{3.216}$$

$$- \sum_{(k)} \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\boldsymbol{F}_k = -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e} .$$

Zde je ovšem nutno poznamenat, že zobecněný Ohmův zákon (3.216) je použitelný pro plně ionizované plazma opět pouze v prvním přiblížení. Obecně totiž může pravá strana této rovnice záviset na magnetickém poli uvnitř plazmatu a gradientu teploty elektronů. Jestliže zanedbáme $\nabla_r T_e$, pak je pravá strana (3.216) stále ještě složena ze dvou členů; jestliže systém není daleko rovnováhy, pak přesnější tvar pravé strany rovnice (3.216) je

$$-\frac{1}{\tau_e}\left(\frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{1{,}96} + \boldsymbol{j}_\perp\right) \tag{3.217}$$

V magnetickém poli

kde $\boldsymbol{j}_\parallel$ je složka proudové hustoty ve směru magnetického pole a $\boldsymbol{j}_\perp$ je složka proudové hustoty ve směru kolmém na magnetické pole.

Rozdíl mezi (3.217) a (3.215) resp. pravou stranou (3.216), si ukážeme názorně na příkladu. Předpokládejme stacionární stav, tj. $\partial \boldsymbol{j}/\partial t = 0$ a nechť $\boldsymbol{F}_k = 0$. Z rovnice (3.216) pak dostaneme

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{n_e e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} , \tag{3.218}$$

kde

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{n_e e}\nabla_r p_e \tag{3.219}$$

a

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} \tag{3.220}$$

VODIVOST

je vodivost plazmatu. Vyjádříme-li z (3.218) $\boldsymbol{j}$, dostaneme po menších úpravách, že

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\} , \tag{3.221}$$

kde

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{B}}{B} \quad \text{a} \quad \omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \tag{3.222}$$

Elektronová cyklotronová frekvence

je elektronová cyklotronová frekvence.

Transportní rovnice pro plazma - vodivost

a rovnice pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (zobecněný Ohmův zákon) má nyní tvar

(3.216) $$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \\ - \sum_{(k)} \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k} \boldsymbol{F}_k = -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e}.$$

Zde je ovšem nutno poznamenat, že zobecněný Ohmův zákon (3.216) je použitelný pro plně ionizované plazma opět pouze v prvním přiblížení. Obecně totiž může pravá strana této rovnice záviset na magnetickém poli uvnitř plazmatu a gradientu teploty elektronů. Jestliže zanedbáme $\nabla_r T_e$, pak je pravá strana (3.216) stále ještě složena ze dvou členů; jestliže systém není daleko rovnováhy, pak přesnější tvar pravé strany rovnice (3.216) je

(3.217) $$-\frac{1}{\tau_e}\left(\frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{1{,}96} + \boldsymbol{j}_\perp\right),$$

kde $\boldsymbol{j}_\parallel$ je složka proudové hustoty ve směru magnetického pole a $\boldsymbol{j}_\perp$ je složka proudové hustoty ve směru kolmém na magnetické pole.

Rozdíl mezi (3.217) a (3.215) resp. pravou stranou (3.216), si ukážeme názorně na příkladu. Předpokládejme stacionární stav, tj. $\partial \boldsymbol{j}/\partial t = 0$ a nechť $\boldsymbol{F}_k = 0$. Z rovnice (3.216) pak dostaneme

(3.218) $$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{n_e e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B},$$

kde

(3.219) $$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{n_e e}\nabla_r p_e$$

a

(3.220) $$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

je vodivost plazmatu. Vyjádříme-li z (3.218) $\boldsymbol{j}$, dostaneme po mezích úpravách, že

(3.221) $$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\},$$

kde

(3.222) $$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{B}}{B} \quad \text{a} \quad \omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

je elektronová cyklotronová frekvence.

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

vodivost

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

cyklotronová frekvence

Jestliže nyní použijeme na pravé straně (3.216) výrazu (3.217), dostaneme, že

(3.223) $$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{\boldsymbol{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{1}{n_e e}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}),$$

kde

(3.224) $$\sigma_\parallel = 1{,}96\sigma \quad \text{a} \quad \sigma_\perp = \sigma;$$

vyloučením $\boldsymbol{j}$ pak dostaneme

(3.225) $$\boldsymbol{j} = \sigma_\parallel \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma_\perp}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\}.$$

Odtud již vidíme, že i v tak jednoduchém případě, kdy $\nabla_r T_e = 0$ a systém je blízko rovnováhy, je vodivost plazmatu závislá na směru magnetického pole.

V obecném případě má vodivost plazmatu tenzorový charakter.*)

Vodivosť a ani netušíme EEDF..? Je to vôbec možné…? A čo σ(v) ??

Ja tomu neverím, …. Ale tie podmienky sú asi iné než plazma v našej laborke ….

A čo σ(v) ??

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

cyklotronová frekvence

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

vodivost

Srážky a cyklotronová frekvence

$$(3.208)\quad n_e\,\delta_i(m_e\bar{V}_e) = -\,n_i\,\delta_e(m_i\bar{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{V}_e - \bar{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i)\,,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence.

Jestliže nyní použijeme na pravé straně (3.216) výrazu (3.217), dostaneme, že

$$(3.223)\quad E' = \frac{j_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{j_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{1}{n_e e}(j \times B)\,,$$

kde

$$(3.224)\quad \sigma_\parallel = 1{,}96\sigma \quad \text{a} \quad \sigma_\perp = \sigma\,;$$

vyloučením j pak dostaneme

$$(3.225)\quad j = \sigma_\parallel E'_\parallel + \frac{\sigma_\perp}{1 + \omega_{ce}^2\tau_e^2}\{E'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(h \times E')\}\,.$$

Odtud již vidíme, že i v tak jednoduchém případě, kdy $\nabla T_e = 0$ a systém je blízko rovnováhy, je vodivost plazmatu závislá na směru magnetického pole.

V obecném případě má vodivost plazmatu tenzorový charakter.*)

rovnice pro DRIFT

$$\vec{\bar{v}} = -\frac{e}{m\nu_1}\vec{E} = \mu\vec{E}$$

$$\nu_1 = 2\pi N v \int_0^\pi (1 - \cos\chi)\,\sigma(\chi, v)\sin\chi\,d\chi$$

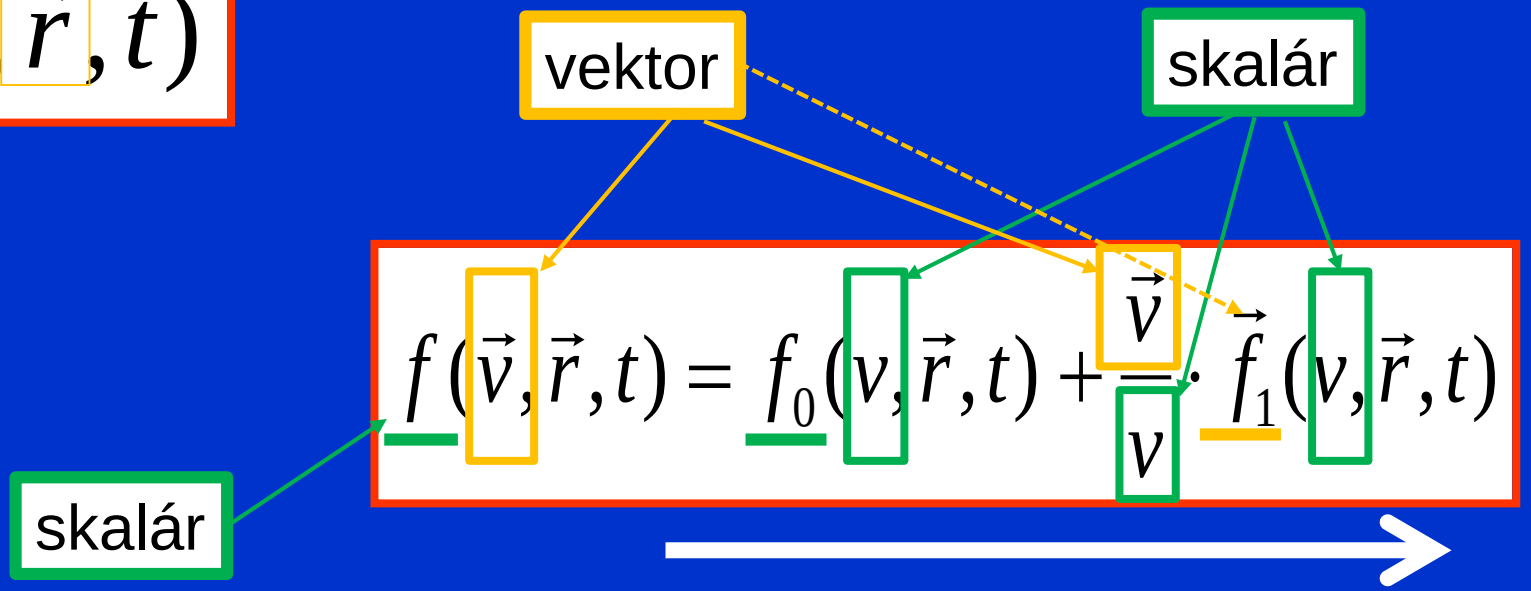
Treba postupovať veľmi opatrne
z hľadiska zameny iont ← → neutrálna častica

Řešení B. rovnice

- ~Malý Kracík.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t)$$



Řešení B. rovnice

- Malý a Velký Kracík.

Lorentzovské přiblížení pro dvousložkový systém tvořený jednak neutrálními částicemi a jednak částicemi, které mají elektrický náboj….

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

Závislost na rychlosti

Hledáme řešení ve tvaru

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

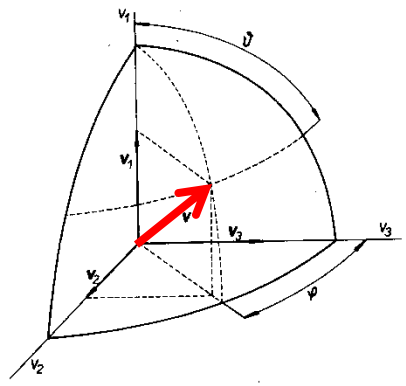
aby jsme vyjádřili toky částic

$$\frac{\partial\left(f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i\right)}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r \left(f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right) + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} \left(f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)\right) = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

MATEMATIKA vynecháme

- Jenom matematika.

V rychlostním prostoru **v**



v

Obr. 51,1. Poměry v rychlostním prostoru rychlosti **v**.

může úhel φ měnit od 0 do 2π, úhel ϑ od 0 do π a jelikož $(\mathbf{c}_1 \,.\, \mathbf{f}_i^{(1)}/c) \equiv (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{f}_i^{(1)}/v) = f_i^{(1)} \cos\vartheta$, vystihne $f_i^{(1)}$ směr unášivé rychlosti a určitým způsobem i její velikost. Podle obr. 51,1 pak platí

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_1}{v} &= \cos\vartheta\,, \\ \frac{v_2}{v} &= \cos(90-\vartheta)\cos(90-\varphi) = \sin\vartheta\sin\varphi\,, \\ \frac{v_3}{v} &= \cos(90-\vartheta)\cos\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi\,. \end{aligned}\right\} \qquad (51{,}7)$$

Podle oddílu 33 element prostorového úhlu

$$\mathrm{d}\omega = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

a element rychlostního prostoru

$$\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2\,\mathrm{d}v_3 = v^2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Zavedeme-li ještě jednotkové vektory $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$ pro $\mathbf{c}$ ve směrech os *1*, *2* a *3*, dostaneme při (51,7):

$$\int_{(\omega)} \mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 4\pi\,, \qquad (51{,}8a)$$

$$\int_{(\omega)} \frac{\mathbf{v}}{v}\,\mathrm{d}\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\,\mathbf{e}_1^0 + \frac{v_2}{v}\,\mathbf{e}_2^0 + \frac{v_3}{v}\,\mathbf{e}_3^0\right)\mathrm{d}\omega =$$

$$= \mathbf{e}_1^0 2\pi \int_0^{\pi} \cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta + \mathbf{e}_2^0 \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi +$$

$$+ \mathbf{e}_3^0 \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,, \qquad (51{,}8b)$$

(51,8b)

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \mathrm{d}\omega = 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{4\pi}{3}\,, \qquad (51{,}8c)$$

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 \mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3}\,, \qquad (51{,}8d)$$

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^2 \mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3}\,. \qquad (51{,}8e)$$

Stejným způsobem vytvoříme průměry přes všechny směry v rychlostním prostoru z dalších výrazů:

$$\int_{(\omega)} \frac{v_1}{v}\frac{v_2}{v}\,\mathrm{d}\omega = \int_{(\omega)} \frac{v_1}{v}\frac{v_3}{v}\,\mathrm{d}\omega = \int_{(\omega)} \frac{v_2}{v}\frac{v_3}{v}\,\mathrm{d}\omega = 0\,, \qquad (51{,}8f)$$

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^3 \mathrm{d}\omega = 2\pi \int_0^{\pi} \cos^3\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} (\cos 3\vartheta + 3\cos\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^3 \mathrm{d}\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^3 \mathrm{d}\omega = 0\,, \qquad (51{,}8g)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \frac{v_2}{v}\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,, \\ &\text{stejně i} \\ &\int_{(\omega)} \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \frac{v_3}{v}\,\mathrm{d}\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 \frac{v_1}{v}\,\mathrm{d}\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 \frac{v_3}{v}\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^2 \frac{v_1}{v}\,\mathrm{d}\omega = \int_{(\omega)} \left(\frac{v_3}{v}\right)^2 \frac{v_2}{v}\,\mathrm{d}\omega = 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (51{,}8h)$$

Řešení B. rovnice

- Hledáme tvar vhodný pro řešení transportu….

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial(f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

Budeme hledat integrály jako ….

$$\frac{\partial(f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$\bullet \int_\omega d\omega$$

$$\int_\omega \frac{\partial(f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} d\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots = \int_\omega \frac{\delta f_i}{\delta t} d\omega$$

V rychlostním prostoru **v**

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i) d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega f_0(v,\vec{r},t) d\omega \quad + \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i d\omega = \frac{\partial}{\partial t} f_0 \int_\omega d\omega \quad + \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}_1 \int_\omega \vec{v}/v \, d\omega = \quad 4\pi \frac{\partial}{\partial t} f_0$$

časová derivace – f_1 vypadlo

$$\int_\omega \frac{\vec{v}}{v} d\omega = 0$$

(51,8b)

Řešení B. rovnice

- Hledáme tvar vhodný pro řešení transportu….

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$\frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\delta f_i}{\delta t} \qquad \bullet \int_\omega d\omega$$

$$\int_\omega \frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} d\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots = \int_\omega \frac{\delta f_i}{\delta t} d\omega$$

(51,8b)

$$\int_\omega \frac{\vec{v}}{v} d\omega = 0$$

=0

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i) d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega f_0(v,\vec{r},t) d\omega + \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i d\omega = \frac{\partial}{\partial t} f_0 \int_\omega d\omega + \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}_1 \int_\omega \vec{v}/v \cdot d\omega = 4\pi \frac{\partial}{\partial t} f_0$$

Pozor, doposial to bolo podla Maleho Kracíka, dalej je rovnica podla Velkeho Kracíka

(5.88) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_r \boldsymbol{f}_1 + \frac{v}{3} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial v} + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1 = J_{\text{I.L.}}(f_0),$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{Ze}{m}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\omega}_c = -\frac{Ze}{m}\boldsymbol{B},$$

což můžeme ještě upravit na

VK …. Rovnice A

(5.89) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_r \boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1) = J_{\text{I.L.}}(f_0).$$

Elektronová cyklotronová frekvence

Řešení B. rozklad do dvou rovnic

- Velký Kracík
- Rovnice (A) a (B)

tak, že budou symetrické a irreducibilní.*) Tyto výpočty jsou však poměrně složité, a proto je zde nebudeme uvádět.**)

Shrneme-li předchozí výsledky, můžeme psát, že

(5.87) $$f(v, \boldsymbol{r}, t) = f_0(v, \boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{f}_1(v, \boldsymbol{r}, t) + (\boldsymbol{vv})^0 : \mathbf{f}_2(v, \boldsymbol{r}, t) + \ldots .$$

Rovnici pro f_0 stanovíme celkem snadno z (5.50) s uvážením rovnic (5.67) a (5.74). Dostaneme

(5.88) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}_1 + \frac{v}{3} \boldsymbol{\Gamma} \,.\, \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial v} + \boldsymbol{\Gamma} \,.\, \boldsymbol{f}_1 = J_{\text{I.L.}}(f_0) ,$$ A

což můžeme ještě upravit na

(5.89) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div}_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 \boldsymbol{\Gamma} \,.\, \boldsymbol{f}_1) = J_{\text{I.L.}}(f_0) .$$ A*

Pozor VK má jinak definovanou funkci f

Pozor na vektory a skaláry… od **v**

$$f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(v, \vec{r}, t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v, \vec{r}, t)$$

Pozor MK má definovanou funkci f

Řešení B. druhá rovnice

- Hledáni f_0 a f_1

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i)}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla_r (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) + \frac{\vec{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} (f_0(v,\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)) = \frac{\delta f_i}{\delta t}$$

$$\frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t))}{\partial t} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\delta f}{\delta t} \quad \bullet \int_\omega \vec{v} d\omega$$

$$\int_\omega \frac{\partial (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t))}{\partial t} \vec{v} d\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots = \int_\omega \frac{\delta f}{\delta t} \vec{v} d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\omega (f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)_i) \vec{v} d\omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_\omega f_0 \vec{v} d\omega + \frac{\partial}{\partial t} \int_\omega \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1 \vec{v} d\omega = \frac{\partial}{\partial t} f_0 \int_\omega \vec{v} d\omega + \frac{\partial}{\partial t} \vec{f} \int_\omega \vec{v}/v \cdot \vec{f}_1 \cdot \vec{v} d\omega = \frac{4}{3} \pi v \frac{\partial}{\partial t} f_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + \ldots\ldots \sim \int_\omega \frac{\delta f}{\delta t} \vec{v} d\omega$$

Rovnice B

Srážkový člen - mimo dosah naší aproximace

Hledáni f_0 a f_1

Integrace srážkového členu

- Malý Kracík.

$$\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \cong \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{kT_k}{m_k}\frac{v^3}{\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k \lambda_i} f_i^{(0)}\right) - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_i^{(1)}}{\lambda_i}; \quad m_i \ll m_k \qquad (52{,}22)$$

Dalším omezením je $n_i \ll n_k$ ze stejných důvodů jako u rovnice (52,12). Poslední vyjádření $[\delta f_i/\delta t]$ tak velmi dobře pro pružné srážky částic i-tého druhu s částicemi k-tého druhu nahrazuje integrální vyjádření (31,25). Vystihuje tepelný neuspořádaný pohyb částic k-tého druhu a pro statistickou rovnováhu udává $f_i^{(0)}$ Maxwellovou rozdělovací funkcí.

Známe-li diferenciální vyjádření srážkového členu pro částice i-tého druhu s funkcemi $f_i^{(0)}$ a $\mathbf{f}_i^{(1)}$, můžeme odvodit výrazy $(1/4\pi)\int_{(\omega)}[\delta f_i/\delta t]\,\mathrm{d}\omega$ z rovnice (51,18) a $(3/4\pi)(1/v)\int_{(\omega)}[\delta f_i/\delta t]\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}\omega$ z rovnice (51,23). Dosadíme do nich za $[\delta f_i/\delta t]$ ze vzorce (52,22) a provedeme naznačené úkony:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(\omega)}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right)\int_{(\omega)}\mathrm{d}\omega - \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{f}_i^{(1)}}{\lambda_i}\cdot\int_{(\omega)}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Podle (51,8a) a (51,8b) dostáváme

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(\omega)}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}\omega = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right) \quad m_i \ll m_k,\ n_i \ll n_k. \qquad (52{,}23)$$

Stejně upravíme druhý potřebný výraz:

$$\frac{3}{4\pi}\frac{1}{v}\int_{(\omega)}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathbf{v}\,\mathrm{d}\omega = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{v^3}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right)\int_{(\omega)}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\omega -$$

$$- \frac{3}{4\pi}\frac{1}{v\lambda_i}\int_{(\omega)}\sum_\beta v_\beta \mathbf{e}_\beta^0 \sum_\alpha f_{i\alpha}^{(1)} v_\alpha\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Podle (51,8b) je první člen opět nulový, druhý člen podle vzorců (51,8c) až (51,8f) má smysl pouze pro $\alpha = \beta$, tj.

$$- \frac{3}{4\pi}\frac{v}{\lambda_i}\sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha^0 f_{i\alpha}^{(1)}\int_{(\omega)}\frac{v_\alpha^2}{v^2}\,\mathrm{d}\omega = -\frac{v}{\lambda_i}\mathbf{f}_i^{(1)}\,.$$

Řešení B. - rozklad do dvou rovnic

- Velký Kracík
- Rovnice (A) a (B)

(5.14) $$\nu_1 = 2\pi N v \int_0^{\pi} (1 - \cos\chi)\,\sigma(\chi, v)\sin\chi\,d\chi$$

Držíme se Velkého Kracíka proto:

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

Veličinu $\nu_l(v)$ definovanou rovnicí (5.11) resp. (5.12) můžeme interpretovat jako relaxační frekvenci l-tého řádu pro různé anisotropie plynu lehkých částic. Speciálně

(5.14) $$\nu_1 = 2\pi N v \int_0^{\pi} (1 - \cos\chi)\,\sigma(\chi, v)\sin\chi\,d\chi$$

N

$$\Gamma = \frac{Ze}{m}E, \quad \omega_c = -\frac{Ze}{m}B,$$

(5.95) $$\mathbf{f}_{(k)} = 0 \quad \text{pro} \quad k \geqq 2,$$

redukuje se rozklad (5.55) resp. (5.55′) na

(5.96) $$f(v, r, t) = f_0(v, r, t) + v\,.\,f_1(v, r, t)$$

a rovnice pro funkce f_0 a f_1 mají tvar

(5.97′) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3}\nabla_r\,.\,f_1 + \frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^3\Gamma\,.\,f_1) = J_{\text{I.L.}}(f_0),$$

nebo rozepíšeme-li pravou stranu podle (5.40)

(5.97) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3}\nabla_r\,.\,f_1 + \frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^3\Gamma\,.\,f_1) = \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2m}{M}\nu_1 v^3\left(f_0 + \frac{2kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial(v^2)}\right)\right]$$

A

a

(5.98) $$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \nabla_r f_0 + \frac{\Gamma}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v} - (\omega_c \times f_1) = -\nu_1 f_1\,.$$

B

Zákony zachování

- Střední hodnoty vektoru
- Střední hodnoty skaláru

Všimněme si nyní trochu podrobněji posledních dvou rovnic, prot převážně těchto budeme v dalším textu používat. Z tvaru rozdělovací funkce $f(v, r, \ldots)$ (5.96) je zřejmé, že funkce f_0 a f_1 musí nutně souviset s některými parametry ná ui uvažovaného systému částic.

V kapitole 3 jsme si definovali, že střední hodnota nějaké funkce $\varphi(v, r, t)$ je dána výrazem

(5.99) $$\bar{\varphi} = \frac{1}{n}\int \varphi(v, r, t) f(v, r, t)\, dv ,$$

kde

(5.100) pre $\varphi = 1$ $$n = \int f(v, r, t)\, dv .$$

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v}\cdot\vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

Uvážíme-li nyní rozvoj (5.96), můžeme psát

(5.101) $$n = \int f_0\, dv + \int v\,.\,f_1\, dv .$$

Protože ale $dv = v^2\, dv \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, je

(5.102) $$\int v\,.\,f_1(v_1, r, t)\, dv =$$

$$= \int_0^\infty v^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin\vartheta\cos\varphi f_{1x} + \sin\vartheta\sin\varphi f_{1y} + \cos\vartheta f_{1z})\, dv\, d\vartheta\, d\varphi = 0$$

a tedy

(5.103) iba na f_0 $$n = \int f_0\, dv = 4\pi\int_0^\infty v^2 f_0\, dv .$$

Podobným způsobem bychom celkem snadno zjistili, že bude-li φ skalární funkce v, r a t, je

(5.104) $$\bar{\varphi} = \frac{4\pi}{n}\int_0^\infty v^2 f_0 \varphi\, dv .$$ iba na f_0

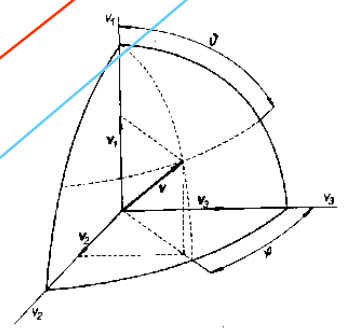
Nechť dále $\vec{\varphi}$ je vektorová funkce rychlosti v, tj. nechť pre určitý tvar funkce

(5.105) $$\vec{\varphi} = v\varphi'(v, r, t)$$

Potom

(5.106) $$\bar{\vec{\varphi}} = \frac{1}{n}\int (f_0 + v\,.\,f_1)\, v\varphi'\, dv = \frac{1}{n}\int (v\,.\,f_1)\, v\varphi'\, dv = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{n}\int_0^\infty v^4 f_1 \varphi'\, dv ,$$

o čemž je možno celkem snadno se přesvědčit integrací. iba na f_1



Obr. 51,1. Poměry v rychlostním prostoru rychlostí v.

může úhel φ měnit od 0 do 2π, úhel ϑ od 0 do π a jelikož $(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{f}_i^{(1)})/c) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{f}_i^{(1)})/v) = f_i^{(1)}\cos\vartheta$, vystihne $f_i^{(1)}$ směr unášivé rychlosti a určitým způsobem i její velikost. Podle obr. 51,1 pak platí

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_1}{v} &= \cos\vartheta , \\ \frac{v_2}{v} &= \cos(90-\vartheta)\cos(90-\varphi) = \sin\vartheta\sin\varphi , \\ \frac{v_3}{v} &= \cos(90-\vartheta)\cos\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi . \end{aligned}\right\} \quad (51,7)$$

Podle oddílu 33 element prostorového úhlu

$$d\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

a element rychlostního prostoru

$$dv_1\, dv_2\, dv_3 = v^2\, dv\, d\omega .$$

interpretace

kde (viz (5.106), kde $\varphi' = 1$)

(5.109) $$\bar{v} = \frac{1}{n}\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty v^4 f_1\, dv .$$

Zákony zachování – řešení B.

$$\varphi = v\varphi'(v, r, t)\,.$$

$$(5.106)\quad \bar{\varphi} = \frac{1}{n}\int (f_0 + v\,.\,f_1)\, v\varphi'\, dv = \frac{1}{n}\int (v\,.\,f_1)\, v\varphi'\, dv = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{n}\int_0^\infty v^4 f_1 \varphi'\, dv\,,$$

(5.97)
$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3}\nabla_r\,.\,f_1 + \frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^3\Gamma\,.\,f_1) = \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2m}{M}\nu_1 v^3\left(f_0 + \frac{2kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial(v^2)}\right)\right]$$

A

a

(5.98)
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \nabla_r f_0 + \frac{\Gamma}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v} - (\omega_c \times f_1) = -\nu_1 f_1\,.$$

B

Rovnice (5.97) a (5.98) úzce souvisí se zákony zachování počtu částic, hybnosti a energie. Budeme-li totiž násobit rovnici (5.97) postupně 1 a $\frac{1}{2}mv^2$ a zintegrujeme-li takto získané rovnice přes rychlostní prostor (přes dv), dostaneme (za pomoci (5.106), kde $\varphi' = 1$):

$$(5.107)\quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r\,.\,(n\bar{v}) = -\frac{4\pi}{3}\left[v^3\Gamma\,.\,f_1\right]_0^\infty + 4\pi\frac{m}{M}\left[\nu_1 v^3\left(f_0 + \frac{2kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial(v^2)}\right)\right]_0^{+\infty}.$$

Budeme-li předpokládat, že f_0 a f_1 společně se svými derivacemi podle v klesají dostatečně rychle s rostoucím v*), pak pravá strana (5.107) dává nulu a rovnice (5.107) přechází na

$$(5.108)\quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r\,.\,(n\bar{v}) = 0\,,$$

kde (viz (5.106), kde $\varphi' = 1$)

$$(5.109)\quad \bar{v} = \frac{1}{n}\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty v^4 f_1\, dv\,.$$

aj po započítani zražkového člena

Rovnice (5.108) je nám již dobře známý zákon zachování počtu částic.

Veličinu $\nu_l(v)$ definovanou rovnicí (5.11) resp. (5.12) můžeme interpretovat jako relaxační frekvenci l-tého řádu pro různé anisotropie plynu lehkých částic. Speciálně

$$(5.14)\quad \nu_1 = 2\pi N v \int_0^\pi (1 - \cos\chi)\,\sigma(\chi, v)\sin\chi\, d\chi$$

N

$$\Gamma = \frac{Ze}{m}E\,,\quad \omega_c = -\frac{Ze}{m}B\,,$$

*) Jak uvidíme v 6. kapitole, nelze tento předpoklad splnit obecně. Je-li pravá strana (5.107) různá od nuly, pak takováto rovnice popisuje tzv. efekt ubíhajících elektronů. Pokud však nebude toto výslovně uvedeno, budeme předpokládat, že f_0 i f_1 společně se svými derivacemi klesají tak rychle, že

$$\lim_{v\to\infty} v^m f_0 = \lim_{v\to\infty} v^m \frac{\partial f_0}{\partial(v^2)} = \lim_{v\to\infty} v^m f_1 = \lim_{v\to\infty} v^m \frac{\partial f_1}{\partial(v^2)} = 0\,.$$

Zákony zachování – řešení B.

Zákon zachování energie
Relaxace teploty

$$\Gamma = \frac{Ze}{m}E, \quad \omega_c = -\frac{Ze}{m}B,$$

(5.97)
$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3}\nabla_r . f_1 + \frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^3\Gamma . f_1) = \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2m}{M}\nu_1 v^3\left(f_0 + \frac{2kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial(v^2)}\right)\right]$$

A

a

(5.98)
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \nabla_r f_0 + \frac{\Gamma}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v} - (\omega_c \times f_1) = -\nu_1 f_1 .$$

B

Podobně vynásobením (5.97) výrazem $\frac{1}{2}mv^2$ dostaneme po integraci

(5.110)
$$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}) + \nabla_r . (n\bar{v}\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}) - mn\Gamma . \bar{v} = \frac{4\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2m}{M}\nu_1 v^3\left(f_0 + \frac{2kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial(v^2)}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}mv^2\,\mathrm{d}v .$$

Pravou stranu této rovnice můžeme ještě upravit na

(5.111)
$$-2\pi m\int_0^\infty \frac{2m}{M}\nu_1 v^4\left(f_0 + \frac{kT}{m}\frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)\mathrm{d}v = -2\pi m\int_0^\infty \frac{2m}{M}\nu_1 v^4 f_0\,\mathrm{d}v - 2\pi kT\int_0^\infty \frac{2m}{M}\nu_1 v^3\frac{\partial f_0}{\partial v}\,\mathrm{d}v = -2\pi m\int_0^\infty v^4 f_0\,\mathrm{d}v + kT\,2\pi\int_0^\infty f_0\,\mathrm{d}(v^3),$$

$$\Gamma = \frac{Ze}{m}E, \quad \omega_c = -\frac{Ze}{m}B,$$

Veličinu $\nu_l(v)$ definovanou rovnicí (5.11) resp. (5.12) můžeme interpretovat jako relaxační frekvenci l-tého řádu pro různé anisotropie plynu lehkých částic. Speciálně

(5.14)
$$\nu_1 = 2\pi N v\int_0^\pi (1-\cos\chi)\,\sigma(\chi, v)\sin\chi\,\mathrm{d}\chi$$

kde

(5.112)
$$\nu^e = \frac{2m}{M}\nu_1$$

je celková srážková frekvence pro přenos energie, protože relativní změna energie lehké částice vlivem srážek s těžkými částicemi je úměrná $2m/M$ (viz kapitolu 2, rovnice (2.67) a (2.75)). Zavedeme-li dále veličiny

(5.113)
$$\Theta = \frac{4\pi m}{3n}\int_0^\infty v^4 f_0\,\mathrm{d}v = \tfrac{2}{3}\overline{\tfrac{1}{2}mv^2},$$

Teplota..$k_B T$

což je efektivní teplota lehkých částic (elektronů),

(5.114)
$$\tilde{\nu}^e = \frac{4\pi m}{3n\Theta}\int_0^\infty \nu^e v^4 f_0\,\mathrm{d}v,$$

což je střední srážková frekvence pro přenos energie,

(5.115)
$$\bar{\nu}^e = n\tilde{\nu}^e,$$

což je celková střední srážková frekvence pro přenos energie a konstantu

(5.116)
$$c = \frac{4\pi}{3\bar{\nu}^e}\int_0^\infty f_0\,\mathrm{d}(\nu^e v^3),$$

je možno poslední dva výrazy v (5.111) upravit na

(5.117)
$$\tfrac{3}{2}n\tilde{\nu}^e(ckT - \Theta) = \tfrac{3}{2}\bar{\nu}^e(ckT - \Theta)$$

a zákon zachování energie (5.110) má nyní tvar

(5.118)
$$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}) + \nabla_r . (n\bar{v}\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}) - nm\Gamma . \bar{v} = \tfrac{3}{2}\bar{\nu}^e(ckT - \Theta).$$

Poslední člen na levé straně rovnice (5.118) je možno ještě upravit na základě definice Γ (5.7) a definice hustoty proudu J (viz kapitolu 3, rovnice (3.181) a (3.183)). Můžeme totiž psát

(5.119)
$$nm\Gamma . \bar{v} = E . J,$$

kde

(5.120)
$$J = Zen\bar{v} = \frac{4\pi}{3}Ze\int_0^\infty v^4 f_1\,\mathrm{d}v .$$

interpretace

Zákony zachování – řešení B.

- Tok částic
- „Relaxace proudu“

kde

(5.112) $$\nu^{\varepsilon} = \frac{2m}{M}\,\nu_1$$

je celková srážková frekvence pro přenos energie, protože relativní změna energie lehké částice vlivem srážek s těžkými částicemi je úměrná $2m/M$ (viz kapitolu 2, rovnice (2.67) a (2.75)). Zavedeme-li dále veličiny

(5.113) $$\Theta = \frac{4\pi m}{3n}\int_0^\infty v^4 f_0\,\mathrm{d}v = \tfrac{2}{3}\,\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}\,,$$

což je efektivní teplota lehkých částic (elektronů),

(5.114) $$\bar{\nu}^{\varepsilon} = \frac{4\pi m}{3n\Theta}\int_0^\infty \nu^{\varepsilon} v^4 f_0\,\mathrm{d}v\,,$$

což je střední srážková frekvence pro přenos energie,

(5.115) $$\bar{\nu}^{\varepsilon} = n\bar{\nu}^{\varepsilon}\,,$$

což je celková střední srážková frekvence pro přenos energie a konstantu

(5.116) $$c = \frac{4\pi}{3\bar{\nu}^{\varepsilon}}\int_0^\infty f_0\,\mathrm{d}(\nu^{\varepsilon}v^3)\,,$$

je možno poslední dva výrazy v (5.111) upravit na

(5.117) $$\tfrac{3}{2}n\bar{\nu}^{\varepsilon}(ckT - \Theta) = \tfrac{3}{2}\bar{\nu}^{\varepsilon}(ckT - \Theta)$$

a zákon zachování energie (5.110) má nyní tvar

(5.118) $$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}) + \nabla_r\,.\,(n\overline{\boldsymbol{v}\tfrac{1}{2}mv^2}) - nm\boldsymbol{\Gamma}\,.\,\bar{\boldsymbol{v}} = \tfrac{3}{2}\bar{\nu}^{\varepsilon}(ckT - \Theta)\,.$$

Poslední člen na levé straně rovnice (5.118) je možno ještě upravit na základě definice $\boldsymbol{\Gamma}$ (5.7) a definice hustoty proudu $\boldsymbol{J}$ (viz kapitolu 3, rovnice (3.181) a (3.183)). Můžeme totiž psát

(5.119) $$nm\boldsymbol{\Gamma}\,.\,\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{E}\,.\,\boldsymbol{J}\,,$$

kde

(5.120) $$\boldsymbol{J} = Ze n\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{4\pi}{3}Ze\int_0^\infty \boldsymbol{v}^4 f_1\,\mathrm{d}v\,.$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{Ze}{m}\boldsymbol{E}\,,\quad \boldsymbol{\omega}_c = -\frac{Ze}{m}\boldsymbol{B}\,,$$

$$\Theta = \frac{4\pi m}{3n}\int_0^\infty v^4 f_0\,\mathrm{d}v = \tfrac{2}{3}\,\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}\,,$$

což je efektivní teplota lehkých částic (elektronů),

Rovnice (5.118) má nyní tvar

(5.121) $$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{\tfrac{1}{2}mv^2}) + \nabla_r\,.\,(n\overline{\boldsymbol{v}\tfrac{1}{2}mv^2}) - \boldsymbol{E}\,.\,\boldsymbol{J} = \tfrac{3}{2}\bar{\nu}^{\varepsilon}(ckT - \Theta)\,.$$

První člen v této rovnici představuje změnu celkové energie systému částic, člen druhý je pak celkový tok energie. Člen třetí představuje změnu celkové energie systému nabitých částic vlivem vnějšího elektrického pole (Jouleův ohřev) a konečně pravá strana této rovnice představuje změnu celkové energie vlivem srážek s neutrálními těžkými částicemi. Z tvaru tohoto členu je zřejmé, že bude-li teplota neutrálních částic větší ve srovnání s Θ, budou neutrální částice předávat energii částicím nabitým a naopak, bude-li $ckT < \Theta$, budou nabité částice předávat energii neutrálním částicím. Naproti tomu člen $-\boldsymbol{E}\,.\,\boldsymbol{J}$ představuje vždy zvýšení energie. Ukážeme si to na příkladě, kdy systém částic bude stacionární a homogenní, tj. $\partial/\partial t = \partial/\partial \boldsymbol{r} = 0$. Zákon zachování energie (5.121) má nyní tvar

(5.122) $$\boldsymbol{E}\,.\,\boldsymbol{J} = \bar{\nu}^{\varepsilon}(\Theta - ckT)\,;$$

odtud plyne, že energie nabitých částic je větší ve srovnání s energií neutrálních částic a tento přírůstek je úměrný $\boldsymbol{E}\,.\,\boldsymbol{J}$.

B Rovnici vyjadřující zákon zachování impulsu dostaneme nyní z rovnice (5.98), kterou vynásobíme výrazem $m\boldsymbol{v}$ a zintegrujeme přes $\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Po kratších úpravách dostaneme

(5.123) $$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{m\boldsymbol{v}}) + \nabla_r(\tfrac{1}{3}n\overline{mv^2}) - nm[\boldsymbol{\Gamma} + (\boldsymbol{\omega}_c \times \bar{\boldsymbol{v}})] = -mn\overline{\boldsymbol{v}\nu_1}\,.$$

Poslední člen na levé straně této rovnice můžeme ještě upravit na základě definice $\boldsymbol{\omega}_c$ (5.7) a definice proudové hustoty $\boldsymbol{J}$ (5.120); dostaneme

(5.124) $$\frac{\partial}{\partial t}(n\overline{m\boldsymbol{v}}) + \nabla_r(\tfrac{1}{3}n\overline{mv^2}) - nZeE - \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = -n\overline{m\boldsymbol{v}\nu_1}\,.$$

FOR $\nu_1 = \text{constant} \Rightarrow \bar{\nu} = \frac{eE}{m\nu_1}$

stacionární a homogenní, tj. $\partial/\partial t = \partial/\partial \boldsymbol{r} = 0$.

Zákony zachování – řešení B.

5.5 Některé příklady rychlostního rozdělení částic

Uvažujme nyní opět rovnice (5.97) a (5.98) a předpokládejme, že systém lehkých částic je stacionární a homogenní, tj. $\partial/\partial t = \nabla_r = 0$. Rovnice pro f_0 a f_1 mají nyní tvar

(5.125) $$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(v^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\gamma \nu_1 v^3 \left(f_0 + \frac{kT}{m} v^{-1} \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}t}\right)\right]$$ A

(5.97) $$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3}\nabla_r \cdot \boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{3v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_1) = \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2m}{M}\nu_1 v^3 \left(f_0 + \frac{2kT}{m}\frac{\partial f_0}{\partial (v^2)}\right)\right]$$ A

a

(5.98) $$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial t} + \nabla_r f_0 + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v} - (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{f}_1) = -\nu_1 \boldsymbol{f}_1 .$$ B

a

(5.126) $$\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{v}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}v} - (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{f}_1) = -\nu_1 \boldsymbol{f}_1 ,$$ B

kde $\gamma = m/M$.

Z poslední rovnice můžeme určit $\boldsymbol{f}_1$ *); dostaneme

(5.127) $$\boldsymbol{f}_1 = -(v\nu_1)^{-1}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}v}\frac{\boldsymbol{\Gamma} + \mathscr{H}(\mathscr{H} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) + (\mathscr{H} \times \boldsymbol{\Gamma})}{1 + \mathscr{H}^2},$$

kde

(5.128) $$\mathscr{H} = \frac{\boldsymbol{\omega}_c}{\nu_1}$$

je Hallův vektor.

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{Ze}{m}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\omega}_c = -\frac{Ze}{m}\boldsymbol{B},$$

A

Dosadíme-li nyní $\boldsymbol{f}_1$ (5.127) do rovnice (5.125), dostaneme rovnici pro f_0 ve tvaru

(5.129) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left\{\gamma \nu_1 v^3 \left(f_0 + \frac{kT}{m} v^{-1}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}v}\right) + \frac{v^2}{3\nu_1}\mathscr{G}(\nu_1)\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}v}\right\} = 0 ,$$

kde pro jednoduchost zápisu jsme označili

(5.130) $$\mathscr{G}(\nu_1) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}^2 + (\mathscr{H} \cdot \boldsymbol{\Gamma})^2}{1 + \mathscr{H}^2} .$$

Řešení rovnice (5.129) za běžných předpokladů dává pro f_0

(5.131) $$f_0 = C \exp\left\{-\int \frac{v\,\mathrm{d}v}{\frac{kT}{m} + \frac{\mathscr{G}(\nu_1)}{3\gamma\nu_1^2}}\right\},$$

kde C je integrační konstanta určená podmínkou

(5.132) $$4\pi \int f_0 v^2\,\mathrm{d}v = n ,$$

kde n je opět koncentrace částic.

Rozebereme si zde několik speciálních případů.**)

*) $\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{f}_1$ určíme vynásobením (5.126) vektorově $\boldsymbol{\omega}_c$ zprava; vyskytuje-li se výraz $\boldsymbol{\omega}_c \cdot \boldsymbol{f}_1$ pak určíme vynásobením (5.126) skalárně $\boldsymbol{\omega}_c$.

**) Budeme se zabývat pouze výpočtem f_0, protože $\boldsymbol{f}_1$ je jednoznačně určeno funkcí f_0 podle rovnice (5.127).

interpretace

$$(5.131)\qquad f_0 = C\exp\left\{-\int\frac{v\,dv}{\frac{kT}{m}+\frac{\mathscr{G}(v_1)}{3\gamma v_1^2}}\right\},$$

a) Nechť vnější elektrické pole je nulové, tj. $\Gamma = 0$. Potom

$$(5.133)\qquad \mathscr{G}(v_1) = 0$$

B může byt nenulové

a pro $f_0(v)$ máme Maxwellovu rozdělovací funkci

$$(5.134)\qquad f_0 = C\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

kde

$$(5.135)\qquad C = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}.$$

b) Nechť vnější magnetické pole je nulové, tj. $\omega_c = 0$. Potom

$$(5.136)\qquad \mathscr{G}(v_1) = \Gamma^2$$

a (5.131) můžeme upravit na tvar

$$(5.137)\qquad f_0 = C\exp\left\{-\int\frac{m}{kT}\left(\frac{vv_1^2}{v_1^2+\left(\frac{\Gamma^2 m}{3\gamma kT}\right)}\right)dv\right\}.$$

Bude-li nyní srážková frekvence v_1 nezávislá na rychlosti, tj.

$$(5.138)\qquad v_1 = v = \text{konst},$$

pak f_0 bude opět maxwellovské rozdělení

$$(5.139)\qquad f_0 = C\exp\left[-\frac{mv^2}{2k\left(T+\frac{\Gamma^2 m}{3\gamma k}v^{-2}\right)}\right] = C\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT^*}\right)$$

ale s teplotou

$$(5.140)\qquad T^* = T + \frac{m}{3\gamma k}\left(\frac{\Gamma}{v}\right)^2 = T + \frac{M}{3k}\left(\frac{ZeE}{mv}\right)^2.$$

To ale znamená, že při $v_1 = \text{konst}$ je kinetická teplota lehkých nabitých částic (elektronů) vyšší ve srovnání s teplotou neutrálních částic.

Předpoklad, že srážková frekvence elektronů s neutrálními částicemi je konstantní, nezávislá na rychlosti, je příliš ostrý. V obecném případě totiž platí, že v_1 na rychlosti elektronů závisí. Předpokládejme, že

$$(5.141)\qquad v_1(v) = Av^l,$$

kde l je libovolné číslo*) a A je konstanta (pro $l = 1$ máme

$$(5.141')\qquad v_1 = Av$$

a tedy $A^{-1} = \lambda$, kde λ je střední volná dráha elektronů).

Rovnice pro f_0 (5.137) má nyní tvar

$$(5.142)\qquad f_0 = C\exp\left\{-\int\frac{m}{kT}\frac{v^{2l+1}}{v^{2l}+\frac{\Gamma^2 m}{3\gamma A^2 kT}}dv\right\}.$$

Pro $l = 1$, tj. případ modelu dokonale pružných koulí (viz kapitolu 2), kdy

$$(5.143)\qquad v_1 = Av,$$

je integrál v (5.142) snadno spočitatelný a f_0 má tvar

$$(5.144')\qquad f_0 = C\left[1+\frac{3A^2}{\Gamma^2}\frac{kT}{m}v^2\right]^{(m\Gamma/AkT)^2\cdot(1/6\gamma)}\cdot\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Po kratších úpravách pak dostaneme

$$(5.144)\qquad f_0 = C\left[v^2+\frac{M}{3}\left(\frac{ZeE}{mA}\right)^2\frac{1}{kT}\right]^{(mM/6k^2T^2)\cdot(ZeE/mA)^2}\cdot\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

což je rozdělovací funkce, kterou jako první odvodil Davydov.**) Pro silné elektrické pole, kdy

$$(5.145)\qquad \frac{\Gamma^2 m}{3\gamma AkT} = \frac{M}{3kT}\left(\frac{ZeE}{mA}\right)^2 \gg v^2,$$

přechází Davydovova rozdělovací funkce na známou rozdělovací funkci Druyvesteyna (o tom je možno se přesvědčit z (5.142), kde položíme $l = 1$ a provedeme příslušné zanedbání), která má tvar

$$(5.146)\qquad f_0 = C\exp\left(-\frac{3}{4}\gamma\left(\frac{A}{\Gamma}\right)^2 v^4\right) = C\exp\left[-\frac{3}{4}\frac{m}{M}\left(\frac{mA}{ZeE}\right)^2 v^4\right].$$

*) Závislost (5.141) pro $l = 0$ vystihuje s dobrou přesností srážky elektronů s atomy He a H_2, pro $l = 1$ pak srážky v Ne a dále pro $l = 3$, 3,5 a 4 pak srážky pomalých elektronů v Ar, Kr a Xe; viz D. Darbiere: Phys. Rev. *84* (1951), 653; S. C. Brown: Handbuch der Physik, ed. S. Flüge, Vol. 22 (Berlin 1956), 531; G. L. Braglia: Phys. Lett. *17* (1965), 260.

**) B. Davydov, ŽETF *6* (5) (1936), 463; viz též B. Davydov, Uspěchi fiz. nauk *93* (1967), 401.

Zákony zachování – řešení B.

- A

Pro $l > 1$ můžeme (5.142) upravit na

$$(5.147)\qquad f_0 = C\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\exp\left\{\frac{1}{3\gamma}\left(\frac{\Gamma m}{AkT}\right)^2\int\frac{v}{v^{2l}+\left(\frac{\Gamma^2 m}{3\gamma A^2 kT}\right)}\,\mathrm{d}v\right\}.$$

Pro různé hodnoty l pak dostáváme různé rozdělovací funkce.*) Důležitou úlohu v tomto případě hraje člen $\exp(-mv^2/2kT)$, vlivem kterého je možno f_0 normovat k n (rovnice (5.132)); tato okolnost nám zaručuje, že existuje stacionární stav. Případy, kdy $l < 0$, probereme později.**)

c) Nechť $\boldsymbol{E} \neq 0$, $\boldsymbol{B} \neq 0$.

Zde budeme rozlišovat dva případy, a to že vektor $\boldsymbol{\omega}_c$ je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{\Gamma}$ nebo $\boldsymbol{\omega}_c$ je kolmé k vektoru $\boldsymbol{\Gamma}$.

Případ, kdy $\boldsymbol{\omega}_c$ je rovnoběžné s $\boldsymbol{\Gamma}$, je jednoduchý, protože pak

$$(5.148)\qquad \mathscr{G}(v_1) = \Gamma^2 .$$

To ale znamená, že rozdělovací funkce f_0 je v tomto případě stejná jako při $\omega_c = 0$. Liší se pouze f_1, což je patrno z (5.127).

Sledujme proto nyní případ, kdy $\boldsymbol{\omega}_c$ je kolmé na $\boldsymbol{\Gamma}$. Potom

$$(5.149)\qquad \mathscr{G}(v_1) = \frac{\Gamma^2}{1+\mathscr{H}^2}$$

a $f_0(v)$ můžeme podle (5.131) zapsat ve tvaru

$$(5.150')\qquad f_0 = C\exp\left\{-\int\frac{v}{\frac{kT}{m}+\frac{\Gamma^2}{3\gamma v_1^2(1+\mathscr{H}^2)}}\,\mathrm{d}v\right\}$$

nebo po úpravě

$$(5.150)\qquad f_0 = C\exp\left\{-\frac{m}{kT}\int\frac{(\omega_c^2+\nu_1^2)\,v}{v_1^2+\left(\omega_c^2+\frac{\Gamma^2 m}{3\gamma kT}\right)}\,\mathrm{d}v\right\}.$$

Pro $v_1 = v = \text{konst}$ dostáváme maxwellovské rozdělení, tj.

$$(5.151)\qquad f_0 = C\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT^*}\right),$$

kde

$$(5.152)\qquad T^* = T + \frac{m}{3\gamma k}\,\frac{\Gamma^2}{v^2+\omega_c^2}.$$

Bude-li srážková frekvence záviset na rychlosti podle (5.141), můžeme (5.150) snadno upravit tak, že dostaneme

(5.141) $\qquad \nu_1(v) = Av^l,$

$$(5.153)\qquad f_0 = C\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).\exp\left\{\frac{1}{3\gamma}\left(\frac{\Gamma m}{AkT}\right)^2\times\int\frac{v\,\mathrm{d}v}{v^{2l}+\left[\left(\frac{\omega_c}{A}\right)^2+\frac{m}{3\gamma kT}\left(\frac{\Gamma}{A}\right)^2\right]}\right\}.$$

Pro různé hodnoty l pak dostáváme různé rozdělovací funkce.

Velmi jednoduchá situace nastane pro $l = 1$. Z (5.153) pak dostaneme, že*)

$$(5.154)\qquad f_0 = C\left[v^2+\left(\frac{ZeB}{mA}\right)^2+\frac{M}{3kT}\left(\frac{ZeE}{mA}\right)^2\right]^{(m/2kT).(M/3kT).(ZeE/mA)^2}.\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Pro $B \to 0$ pak dostáváme opět Davydovovo rozdělení.

- A

Dnes koniec rosprávky