Boltzmann equation short TZFP Lecture 4A - 20. 04. 2021

Soubor N částic

1.1 Základní definice

Rovnice mechaniky nejsou při velkém počtu N částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při statistických představách dojít k zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému částic vystihnou.

Nechť pro makroskopický systém, který má objem V, je známa mikroskopická struktura; systém je tvořen N interagujícími částicemi a nechť každá z těchto částic se řídí zákony klasické dynamiky. Pro jednoduchost předpokládejme, že částice nemají vnitřní stupně volnosti. Mikroskopický stav systému je určen bodem (fází) v $6N$ rozměrném fázovém prostoru Γ, který má souřadnice $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$, kde $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i$ jsou polohové vektory i-té částice v prostoru souřadnic, respektive v prostoru impulsů. Definujme dále objemový element $\mathrm{d}\Gamma$ v Γ prostoru jako

$$\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N .$$

Protože každý systém je reprezentován fází v Γ prostoru, soubor velkého počtu W systémů bude reprezentován „oblakem“ W fází v Γ. Označíme-li hustotu tohoto oblaku (fázovou hustotou) v Γ prostoru v čase t jako $\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$, je potom počet fází (fázových bodů), obsažených v $\mathrm{d}\Gamma$ kolem bodu $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ v čase t, roven

$$\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N$$

a

$$\int \varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N = W . \tag{1.1}$$

Fázovou hustotu $P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$, odpovídající jednomu systému, tj.

$$P_N = \frac{\varrho(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)}{W} \tag{1.2}$$

nazveme hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Potom z předchozích úvah a z fyzikálního významu $P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ je zřejmé, že

$$\int P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}^N = 1 . \tag{1.3}$$

Element $\mathrm{d}\Gamma$ v Γ prostoru jako:
$\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}r_1\, \mathrm{d}r_2 \ldots\ldots \mathrm{d}r_N\, \mathrm{d}p_1 \ldots\ldots \mathrm{d}p_N = \mathrm{d}r^N \mathrm{d}p^N$

Soubor systému představuje „oblak“ s hustotou $\rho(t, r_1, r_2, \ldots\ldots r_N, p_1, \ldots\ldots p_N)$

Fázový prostor

- Přecházíme z exaktního popisu na popis pomocí pravděpodobností.
- Rozdělovací funkce

N interagujících částic ---- <u>každá se řídí zákony klasické dynamiky</u>.

Element d Γ v Γ prostoru jako: $d\Gamma = dr_1\, dr_2 \ldots dr_N\, dp_1 \ldots dp_N = dr^N dp^N$

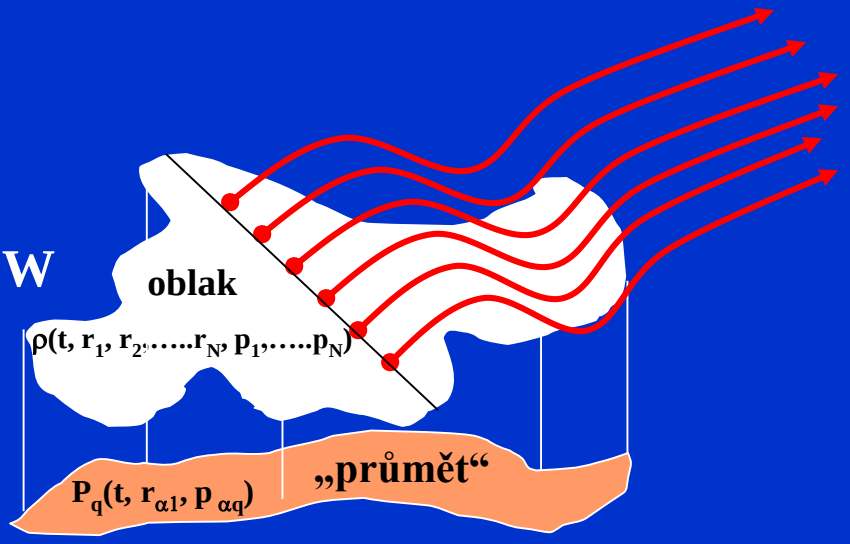
<u>Soubor systému</u> představuje „oblak“ s hustotou $\rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$

<u>Celkový počet fází v souboru je</u>

$$\int \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^N dp^N = W$$

<u>Hustota pravděpodobnosti</u>

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$$



Integraci P přes podmnožinu proměnných získáme „průmět“ nezávislý na souřadnicích $r^{N-q} p^{N-q}$

$$P_q(t, r_{\alpha 1}, p_{\alpha q}) = \int P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dr^{N-q} dp^{N-q}$$

Pokud prointegrujeme <u>přes impulsy</u> získáme pravděpodobnost, že systém má určitou konfiguraci rozložení v prostoru

$$P_N(t, r_1, \ldots\ldots r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, dp^N$$

Liouvillův teorém

- Hamiltonián N častíc
- Zobecněné souřadnice

Sledujeme časový vývoj souboru N částic…
každá částice se pohybuje v souladu s Hamiltonovými rovnicemi:

$$\dot{p}_{i_\alpha} = -\frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial r_{i_\alpha}} \tag{1.9}$$

$$\dot{r}_{i_\alpha} = \frac{\partial H(r_1, \ldots, r_N; p_1, \ldots, p_N)}{\partial p_{i_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace J=1 a proto je

$$\int d\Gamma = \int dr^N dp^N = \text{const}, \tag{1.10}$$

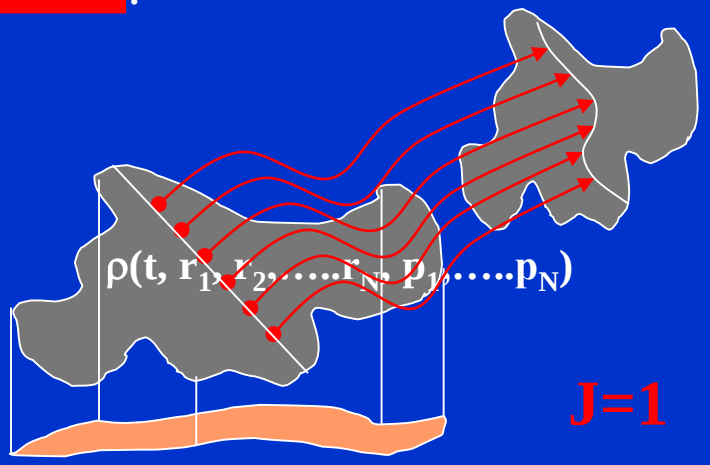
Liouvillův teorém

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina .

proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

i když se může měnit tvar tohoto objemu a tedy plocha, kterou je tento objem uzavřen. Rovnice (1.10) je vlastně matematický zápis Liouvillova teorému a říká, že fázový objem se pohybuje tak, jako kdyby byl nestlačitelná kapalina. Pro takovéto kapaliny však platí rovnice kontinuity (v Γ prostoru)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho V) = 0 \tag{1.11}$$



Úvod

- Formy Liouvilovho teorému
- Vnější a vnitřní sily

můžeme napsat „rovnici kontinuity“

(1.11) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho V) = 0$$

Pořadí deriivací

nebo, což je totéž

(1.12) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} V + V \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0 ,$$

kde V je „rychlost“ v Γ prostoru (o složkách $\dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_N, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_N$), která splňuje rovnici

(1.13) $$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial \dot{r}_{i_\alpha}}{\partial r_{i_\alpha}} + \frac{\partial \dot{p}_{i_\alpha}}{\partial p_{i_\alpha}} \right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r_{i_\alpha} \partial p_{i_\alpha}} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i_\alpha} \partial r_{i_\alpha}} \right) = 0 ,$$

jako důsledek platnosti Hamiltonových rovnic (1.9). Rovnice (1.12) má potom tvar

(1.14) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad} \varrho = 0 .$$

nebo

(1.15) $$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + [\varrho; H] = 0 ,$$

Collisions

$\rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)$

což můžeme psát jako

(1.16) $$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \nabla_{r_i} \varrho + \sum_{i=1}^{N} (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} \varrho = 0 ,$$

kde $[\varrho; H]$ jsou Poissonovy závorky, v_i je rychlost i-té částice, X_i je vektor vnější síly, působící na i-tou částici, a F_i je vektor vnitřní síly působící na i-tou částici, která pochází od $(N-1)$ zbývajících částic.

Po vydělení rovnic (1.14), (1.15) a (1.16) počtem W systémů dostáváme rovnice pro P_N

(1.14′) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} + V \cdot \operatorname{grad} P_N = 0 ,$$

(1.15′) $$\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0 ,$$

(1.16′) $$\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \nabla_{r_i} P_N + \sum_{i=1}^{N} (X_i + F_i) \cdot \nabla_{p_i} P_N = 0 .$$

Pokud prointegrujeme přes impulsy …

$P_N(t, r_1, \ldots\ldots r_N) = \int P_N(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N)\, \mathrm{d}p^N$

Závislost na čase a poloze

Hustota pravděpodobnosti

$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$

1.3 Gibbsův H teorém

- entropia
- reversibilita a ireversibilita procesů

Všimněme si nyní alespoň částečně časového vývoje systému N částic, a to z hlediska vratnosti či nevratnosti procesů, které v tomto systému probíhají. Ze zkušenosti je známo, že většina procesů, které probíhají v přírodě, jsou procesy nevratné. To znamená, že entropie takovéhoto systému roste s časem; v rovnováze je potom entropie konstantní. Ve statistické fyzice je entropie úzce spjata s takzvanou H-funkcí a to vztahem

Hustota pravděpodobnosti

$P_N = \rho(t, r_1, r_2, \ldots r_N, p_1, \ldots p_N) / W$

Použijíc **Liouvilla teorému** dospějeme k výrazu

$S=-kH=-k\int P_N \ln P_N d\Gamma$ kde $H = \int P_N \ln P_N d\Gamma$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial P_N}{\partial t} (\ln P_N + 1) d\Gamma .$$

Uvážíme-li nyní platnost Liouvillovy rovnice (1.15′), můžeme psát, že

$$(1.22) \quad \int \frac{\partial P_N}{\partial t} \ln P_N \, d\Gamma = -\int [H; P_N] \ln P_N \, d\Gamma = \int P_N [H; \ln P_N] \, d\Gamma =$$

$$= \int [H; P_N] \, d\Gamma = -\int \frac{\partial P_N}{\partial t} d\Gamma .$$

=0

$dH/dt=0$ → $dS/dt=0$

To znamená, že systém se časově nevyvíjí…..
t.j. nerovnovážný systém se nemůže nikdy dostat do stavu rovnovážného.

Paradox- klasická mechanika vede k přísně reverzibilnímu popisu, zatím co příroda se chová ireversibilně … ????

Časový vývoj – entropia roste ……Entropia systému roste, $dS/dt>0$

1.4 Rovnice BBGKY

1.4 Rovnice BBGKY

Funkce P_N (t, r_1, r_2,…..r_N, p_1,…..p_N) má určite vlastnosti plynoucí z jejího vztahu k částicím… Pomocí této funkce můžeme určit některé makroskopické veličiny charakterizující daný soubor částic v bodě r….

Např. proudová hustota v bodě r je daná vztahem

$$J(t,r) = \int J(r)\, P_N\,(t, r_1, r_2,\ldots..r_N, p_1,\ldots..p_N)\, dr^N\, dp^N \qquad (1.27)$$

kde $J(r)$ je operátor hustoty proudu

$$J(r) = \Sigma\, p_i \delta(r-r_i) \qquad (1.28)$$

Hustota pravděpodobnosti

$$P_N = \rho(t, r_1, r_2,\ldots..r_N, p_1,\ldots..p_N) / W$$

$$\hat{j}(r) = \Sigma\, e/\mu * p_i \delta(r-r_i)$$

operátor hustoty proudu (toku náboje)

Koncentrace částic $n(\boldsymbol{r}; t)$ v místě $\boldsymbol{r}$ je

$$n(\boldsymbol{r}; t) = \int \hat{n}(\boldsymbol{r})\, P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N , \qquad (1.29)$$

kde $\hat{n}(\boldsymbol{r})$ je operátor polohy

$$\hat{n}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) . \qquad (1.30)$$

Hustota kinetické energie $E(t; \boldsymbol{r})$ v místě $\boldsymbol{r}$ je rovna

$$E(t; \boldsymbol{r}) = \int \hat{E}(\boldsymbol{r})\, P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N , \qquad (1.31)$$

kde $\hat{E}(\boldsymbol{r})$ je operátor kinetické energie

$$\hat{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i}\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \qquad (1.32)$$

a m_i je hmotnost i-té částice.

Pro nabité částice je dále možno zavést proudovou hustotu $\boldsymbol{j}(t; \boldsymbol{r})$ v bodě $\boldsymbol{r}$ (hustotu toku náboje) vztahem

$$\boldsymbol{j}(t; \boldsymbol{r}) = \int \hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})\, P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N , \qquad (1.33)$$

kde $\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})$ je operátor hustoty proudu (toku náboje)

Úvod k BBGKY
(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)

Z výše uvedených úvah plyne, že je vhodné zavést takové funkce a rovnice pro tyto funkce, které budou určovat chování s částic souboru ($s \ll N$). Definujme tedy pro $s \ll N$ funkci $F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)$ tímto způsobem:

$$F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = V^s P_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = \tag{1.38}$$

$$= V^s \int \ldots \int P_N(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N$$

pro $s = 1, 2, 3, \ldots$

Z normovací podmínky

$$\frac{1}{V^s} \int \ldots \int F_s(t; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s; \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_s = 1 \tag{1.39}$$

$V^{-s}F_s(t,r_1, \ldots\ldots r_s,p_1 \ldots p_s)$ je pravděpodobnost toho, že skupina **s** částic ze souboru **N** částic se bude v čase **t** nacházet v elementu $dr_1, \ldots\ldots dr_s, dp_1 \ldots dp_s$ bez ohledu na stav zbývajících (N-s) částic.

Pro interagující částice

- Trochu omezíme obecnost Hamiltonianu

(1.42) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} - [H; P_N] = 0 .$$

Hamiltonovu funkci H pro N vzájemně interagujících částic můžeme zapsat ve tvaru

(1.43) $$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m_i} + U_i(\boldsymbol{r}_i) \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^{N} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi_{ij} ,$$

kde $H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i)$ je hamiltonián samotné i-té částice a $U_i(\boldsymbol{r}_i)$ je potenciál, který je způsobený efekty na stěnách a vnějšími silami. $\Phi_{ij} = \Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ je interakční potenciál mezi i-tou a j-tou částicí.

Použitím rovnice (1.43) můžeme Liouvillovu rovnici (1.42) přepsat do tvaru

(1.44) $$\frac{\partial P_N}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} [H_i; P_N] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} [\Phi_{ij}; P_N] = 0 .$$

Budeme-li dále násobit (1.44) V^s a integrovat s ohledem na $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N$ (přes fázový prostor $(N - s)$ částic), dostaneme

(1.45) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} V^s \int \ldots \int [H_i; P_N] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} V^s \int \ldots \int [\Phi_{ij}; P_N] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{p}_N ,$$

$V^{-s}F_s(t, r_1, \ldots\ldots r_s, p_1 \ldots p_s)$ je pravděpodobnost ….

BBGKY rovnice

- Po mnohých úpravách
- Po mnohých omezeních
- Po mnohých zjednodušeních

Budeme-li dále předpokládat, že pro $|\boldsymbol{r}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{r}_j) \to 0$ a pro $|\boldsymbol{p}_j| \to \infty$ je $(\partial P_N/\partial \boldsymbol{p}_j) \to 0$, dostaneme integrací per partes relace

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí

kde

(1.53)
$$H_s = \sum_{i=1}^{s} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{s} \Phi_{ij}$$

je Hamiltonova funkce uzavřeného systému s částic.

S+1

F_s je funkci F_{s+1} → **soustava rovnic**

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí , F_s je funkci F_{s+1}

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} \,. \tag{1.52}$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \frac{N-1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2) \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \tag{1.54}$$

a pro $s = 2$ dostaneme

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N-2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_3 \,. \tag{1.55}$$

Φ_{ij} je interakční potenciál mezi i-tou j-tou částicí
F_s je funkci F_{s+1}

Odvození Boltzmannový rovnice

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} .$$

$$\lim_{\substack{V\to\infty \\ N\to\infty}} \frac{V}{N} = v , \quad 0 < v < \infty ;$$

v je potom převrácená hodnota koncentace n, $v = 1/n$. Rovnice (1.52) má potom tvar*)

(1.56)
$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}] \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} .$$

Vzájemné působení částic

- Zákony zachování

Sila kterou působí částice 2 na částici 1 je $\mathbf{F}_{12}$

$\mathbf{F_{12}} = -\mathbf{F_{21}}$ **2.1**

budeme předpokládat, že síly klesají dostatečně rychle s **r**

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu ,$$

Laboratorní a těžiskový systém

Pohyb každé z těchto částic je ve shodě s Newtonovými rovnicemi, tj.

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12}$$
$$m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21} .$$

Těžiště systému dvou částic $\boldsymbol{r}_c$ je nyní určeno rovnicí

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \mu_1 \boldsymbol{r}_1 + \mu_2 \boldsymbol{r}_2 ,$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} , \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} , \quad \mu_1 + \mu_2 = 1 .$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_c = \mu_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1 + \mu_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2 .$$

$$(m_1 + m_2)\, \ddot{\boldsymbol{r}}_c = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_c = \text{konst} = \boldsymbol{v}_c .$$

$$\boldsymbol{\varrho}_1(t) = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_c ,$$
$$\boldsymbol{\varrho}_2(t) = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_c .$$

Těžiště soustavy dvou částic
se pohybuje konstantní rychlostí během celého srážkového procesu

Pohyb fiktivní částice

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_{21}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{F}_{21}\,.$$

- Pohyb v rovině

To však ale znamená, že naše úloha se redukuje na pohyb fiktivní redukované hmotnosti μ, která se pohybuje kolem silového centra ve vzdálenosti $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Silové centrum je nyní totožné s polohou částice 1. S polohou těžiště

Ukážeme si dále, že daný pohyb je pohybem rovinným. K tomuto účelu násobme (2.25) vektorově vektorem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Dostáváme

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \frac{\mathrm{d}^2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{F}_{21} \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,. \tag{2.26}$$

Protože ale vzájemné působící síly jsou centrální, je pravá strana (2.26) rovna nule. Po kratších úpravách je potom možno (2.26) přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = 0\,, \tag{2.27}$$

odkud dostáváme, že

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{k}\,, \tag{2.28}$$

kde $\boldsymbol{k}$ je konstantní vektor (je určen z počátečních podmínek našeho problému). To ale znamená, že vektor $\boldsymbol{r}$ i vzájemná rychlost částic leží stále v jedné rovině a tedy námi vyšetřovaný vzájemný pohyb částic je skutečně rovinný.

Odvození Boltzmannový rovnice

Velký Kracík

Odvození Boltzmannový rovnice

3.2 Odvození Boltzmannovy rovnice

Z předchozích úvah a z definice rozdělovací funkce vyplývá, že k popisu systému N částic plně postačí, budeme-li znát rozdělovací funkci tohoto systému (případně rozdělovací funkce f_i jednotlivých druhů částic systému). Budeme tedy v dalším textu sledovat zákony, kterými je určeno chování f_i, za předpokladu, že platí následující podmínky:

1. Liouvillův teorém a představy o srážkách částic platí podle našich dosavadních klasických představ;
2. plyn je natolik zředěný, že můžeme uvažovat pouze elastické binární srážky;
3. je splněn předpoklad molekulárního chaosu, tj. stav částice 1 v bodě $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)$ a částice 2 v bodě $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ jsou na sobě nezávislé.
4. vnější síla $\boldsymbol{F}_i$ působící na i-tý druh částic, je nezávislá na rychlosti a je malá ve srovnání se silami, které vznikají v době srážek.

Mějme nyní objemový element μ prostoru se středem v bodě $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}_i$ o velikosti $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$; v čase t obsahuje tento $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ částic i-tého druhu. Jestliže zanedbáme srážky mezi částicemi, pak v čase $t + \mathrm{d}t$ vlivem vnější síly všechny tyto částice budou v objemovém elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ kolem bodu $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$ a v rychlostním elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ kolem bodu $\boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t$ (předpokládáme, že síla $\boldsymbol{F}_i$ se téměř nezmění uvnitř $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ za $\mathrm{d}t$). Podle Liouvillova teorému tedy platí

$$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Vlivem srážek se však tyto dva členy budou lišit. Označíme-li

(3.32) $$\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t$$

jako změnu počtu částic i-tého druhu v $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ způsobenou srážkami za čas $\mathrm{d}t$, musí zřejmě platit

(3.33) $$f_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t, \boldsymbol{v}_i + (\boldsymbol{F}_i/m_i)\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t .$$

Rozvineme-li první člen na levé straně (3.32) do Taylorovy řady, dostaneme

(3.34) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \frac{\delta_e f_i}{\delta t} .$$

Na pravé straně (3.33) stojí nyní srážkový člen $(\delta_e f_i/\delta t)$, kterému nyní musíme dát explicitní tvar. Člen (3.32) je roven počtu částic i-tého druhu, které se dostanou do objemového elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ vlivem srážek s ostatními druhy částic za čas $\mathrm{d}t$ (označí-

(1.15′) $$\frac{\mathrm{d}P_N}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P_N}{\partial t} + [P_N; H] = 0 ,$$

Na pohyb částic systému je možno se dívat jako na kanonické transformace Jakobian transformace je 1 a proto je

$$\int \mathrm{d}\Gamma = \int \mathrm{d}\mathbf{r}^N \mathrm{d}\mathbf{p}^N = \text{const},$$

Fázový objem se nemění. Fázový objem se pohybuje jako nestlačitelná kapalina… proto můžeme napsat „rovnici kontinuity“

BBGKY rovnice aplikace na s=1, s=2

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme konečně požadovanou rovnici pro F_s ve tvaru

(1.52) $$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s; F_s] + \frac{N - s}{V} \sum_{i=1}^{s} \int [\Phi_{i,s+1}; F_{s+1}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1} ,$$

Velmi důležitý a pro fyziku plazmatu nepostradatelný je tvar rovnice (1.52) pro $s = 1$ a $s = 2$. Pro $s = 1$ dostaneme

(1.54) $$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \nabla_{r_1} H_1 \cdot \nabla_{p_1} F_1 - \nabla_{p_1} H_1 \cdot \nabla_{r_1} F_1 + \frac{N - 1}{V} \int (\nabla_{r_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{p_1} F_2 - \nabla_{p_1} \Phi_{12} \cdot \nabla_{r_1} F_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$$

a pro $s = 2$ dostaneme

(1.55) $$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [H_1 + H_2 + \Phi_{12}; F_2] + \frac{N - 2}{V} \int \sum_{i=1}^{2} [\Phi_{i3}; F_3]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}_3 .$$

Taylorova rada pre funkciu G

$$G(\vec{A} + \vec{X}) = G(\vec{A}) + \vec{X} . \nabla_A G$$

$$\mathring{A}_{ij}^{-}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

$$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

Ze zákona zachování energie a impulsu (viz kapitolu 2) dále plyne, že

$$g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'$$

interakční potenciál částic je sféricky symetrický,

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

Protože částice neopustí během srážek objem $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}')$, dostáváme z platnosti Liouvillova teorému důležitý výsledek, že

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

Velký Kracik pokračování

$$A_{ij}^{-}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j, t)\, f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

$$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij}' b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$$

$g_{ij} = g_{ij}', \quad b = b'$

$\varepsilon = \varepsilon'$

$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'$

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

(3.42) $$A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

Srážkový člen

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

(3.53)
$$n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j \neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$
$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$
$$+ \sum_{j \neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

(3.54)
$$\iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

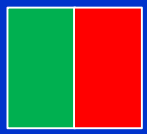
Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

(3.55)
$$\iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b' \, \mathrm{d}b' \, \mathrm{d}\varepsilon' \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j' \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' \,,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

Ukážeme, že pro některé funkce -invarianty

$$\Psi = 1\,, \qquad \boldsymbol{\Theta} = m\boldsymbol{v}\,, \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2\,,$$



Je

$$\iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

Detailně

Srážkový člen – odstrašující příklad

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

$$(3.53)\qquad n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j\neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$

$$+ \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Částice stejného druhu

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

$$(3.55)\qquad \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' ,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

(3.39), (3.40) a (3.41), dostáváme z (3.54) a (3.55)

$$(3.56)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = -\iiiint \Phi_i' (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

Uvážíme-li nyní platnost (3.56) a identitu z (3.54), můžeme konečně psát, že

$$(3.57)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Pro první člen na pravé straně (3.53) můžeme napsat zcela analogickou rovnici, tj.

$$(3.58)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li $\boldsymbol{v}_i$ za $\boldsymbol{v}_i^{(1)}$, rovnice (3.58) se nezmění; můžeme potom psát

$$(3.59)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiiint (\Phi_i^{(1)} - \Phi_i'^{(1)})(f_i'^{(1)} f_i' - f_i^{(1)} f_i)\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} .$$

Nyní sečtením (3.58) a (3.59) získáváme důležitý závěr, že

$$(3.60)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)})(f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Částice stejného druhu

V případě, že $i \neq j$, budeme postupovat poněkud jiným způsobem. K tomuto účelu sestrojme výraz

$$(3.61)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint (\Phi_i - \Phi_i')(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

výsledek

Když toto je = 0, pak toto je = 0

invarianty $\Psi = 1$, $\Theta = m\boldsymbol{v}$, $\Sigma = \tfrac{1}{2}mv^2$,

Srážkový člen – odstrašující příklad ale ten výsledek

- Některé vlastnosti srážkového členu
- Srážkové invarianty

Výsledek

3.3 Některé vlastnosti srážkového členu. Srážkové invarianty

Ukážeme si nyní některé symetrické vlastnosti srážkového členu, které budeme v dalším textu často používat. Srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (3.43) je zřejmě funkcí t, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}_i$. Velmi často se vyskytuje úloha provést integraci srážkového členu s nějakou váhovou funkcí $\Phi_i = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{r}, t)$ přes rychlostní prostor $\boldsymbol{v}_i$, tj. určit

$$(3.53)\qquad n_i \delta\bar{\Phi}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_t \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i + \sum_{j\neq i} \int \Phi_i \left(\frac{\delta_e f_i}{\delta t}\right)_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \iiiint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i +$$

$$+ \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Pomocí některých symetrických vlastností srážkového členu je možno (3.53) převést na podstatně výhodnější formu. Uvažujme nejprve

$$(3.54)\qquad \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Zaměníme-li nyní integrační proměnné $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$, b a ε za $\boldsymbol{v}_i'$, $\boldsymbol{v}_j'$, b' a ε', dostaneme integrál

$$(3.55)\qquad \iiiint \Phi_i' (f_i f_j - f_i' f_j')\, g_{ij} b'\,\mathrm{d}b'\,\mathrm{d}\varepsilon'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i' ,$$

kde $\Phi_i' = \Phi_i(\boldsymbol{v}_i', \boldsymbol{r}, t)$, který je číselně roven integrálu (3.54). Protože ale platí rovnice

a Σ_i. Zde je nutno vzít v úvahu platnost rovnice (3.63), do které nyní za Φ_i dosadíme $\boldsymbol{\Theta}_i$ a Σ_i. Potom dostaneme

$$(3.68)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \boldsymbol{\Theta}_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

a

$$(3.69)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Sigma_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0 .$$

Obdobné výsledky získáme, přejdeme-li od proměnných $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}$, t k jejich ekvivalentům $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{r}$, t (respektive od $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{r}$, t k $\boldsymbol{V}_i$, $\boldsymbol{r}$, t). Forma srážkových invariantů (3.65) a (3.67) se nezmění, je nutná pouze ekvivalentní záměna $\boldsymbol{v}$ za $\boldsymbol{V}$ respektive $\boldsymbol{v}_i$ za $\boldsymbol{V}_i$.

na základě platnosti (3.57). Provedeme-li nyní záměnu i za j, je pravá strana (3.61) rovna také výrazu

$$(3.62)\qquad \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint (\Phi_j - \Phi_j')\,(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i ,$$

který za pomoci (3.61) dává závěrečný vztah, že

$$(3.63)\qquad \sum_i \sum_{j\neq i} \iiiint \Phi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_i \sum_{j\neq i} \tfrac{1}{4} \iiiint (\Phi_i + \Phi_j - \Phi_i' - \Phi_j')\,(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Vrátíme-li se nyní k některým úvahám, které se týkají teorie binárních elastických srážek (viz kapitolu 2), vidíme, že existuje jistý počet funkcí Φ_i, pro které platí

$$(3.64)\qquad \delta\bar{\Phi}_i = 0 .$$

Tyto funkce se nazývají srážkové invarianty a budou zřejmě funkcemi hybnosti a energie částic, neboť tyto veličiny se během srážek zachovávají. Jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), můžeme přijmout $\Phi_i = 1$, což nám vlastně vyjadřuje podmínku, že během srážky částice neopouští objemový element $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Protože během binárních srážek platí zákon zachování hmoty, můžeme také jako třetí veličinu, která splňuje (3.64), přijmout $\Phi_i = m_i$, což je v podstatě úplně ekvivalentní $\Phi_i = 1$.

Jestliže je systém tvořen stejnými částicemi, máme pět srážkových invariantů

$$(3.65)\qquad \Psi = 1 , \qquad \boldsymbol{\Theta} = m\boldsymbol{v} , \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2} m v^2 ,$$

které, vzhledem k platnosti (3.60), splňují (3.64).

Poněkud jiná situace nastane, jestliže systém bude tvořen několika druhy částic. Zde musíme rozlišovat dva případy:

a) Jestliže $\Psi_i = 1$, potom podle rovnice (3.57) platí, že

$$(3.66)\qquad \iiiint \Psi_i (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = 0$$

a tedy tento případ je úplně obdobný případu předchozímu.

b) Jestliže ale

$$(3.67)\qquad \boldsymbol{\Theta}_i = m_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{a} \quad \Sigma_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 ,$$

pak již není možno zobecnit (3.66) do té míry, že bychom nahradili Ψ_i funkcemi $\boldsymbol{\Theta}_i$

Boltzmannův H-teorém speciální případ

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$\nabla_r = 0, \quad \vec{F} = 0$$

3.4 Boltzmannův *H*-teorém

Na rozdíl od Liouvillovy rovnice vyhovuje Boltzmannova rovnice plně požadavku nevratnosti přírodních dějů; tj. entropie definované pomocí rozdělovací funkce, která je řešením Boltzmannovy rovnice (3.43), je rostoucí funkce času až do té doby, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu. Potom je entropie konstantní, na čase nezávislá.

Abychom si ukázali výše uvedenou vlastnost Boltzmannovy rovnice, uvažujme nejprve jednoduchý případ, kdy $\nabla_r = 0$, vnější síly jsou nulové a systém se skládá z jednoho druhu částic. Boltzmannova rovnice má nyní tvar

(3.70) $$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} .$$

S=-kH

Sestrojme funkcionál

Sestrojme dále funkcionál $H(t)$ podle definice

(3.71) $$H(t) = \int f(\boldsymbol{v}, t) \ln f(\boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Potom

(3.72) $$\frac{\partial H}{\partial t} = \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \iiint\!\!\iint (1 + \ln f)\, (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Tento výraz můžeme dále upravit podle (3.60); po kratších úpravách můžeme psát, že

(3.73) $$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{4} \iiint\!\!\iint \ln \left(\frac{f' f'^{(1)}}{f f^{(1)}} \right) (f' f^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} .$$

Částice stejného druhu

Odtud již snadno vidíme, že integrand je vždy kladný a tedy $\partial H / \partial t$ je vždy záporné.

(3.60) $$\iiint\!\!\iint \Phi_i (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \tfrac{1}{4} \iiint\!\!\iint (\Phi_i + \Phi_i^{(1)} - \Phi_i' - \Phi_i'^{(1)})\, (f_i' f_i'^{(1)} - f_i f_i^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

Částice stejného druhu

A máme po paradoxu - entropia rastie

$$\delta H / \delta t \leq 0$$

Velký Kracík

$$\nabla_r = 0, \quad \vec{F} = 0$$

3.4 Boltzmannův *H*-teorém

Na rozdíl od Liouvillovy rovnice vyhovuje Boltzmannova rovnice plně požadavku nevratnosti přírodních dějů; tj. entropie definované pomocí rozdělovací funkce, která je řešením Boltzmannovy rovnice (3.43), je rostoucí funkce času až do té doby, dokud systém nedosáhne rovnovážného stavu. Potom je entropie konstantní, na čase nezávislá.

Abychom si ukázali výše uvedenou vlastnost Boltzmannovy rovnice, uvažujme nejprve jednoduchý případ, kdy $\mathbf{V}_r = 0$, vnější síly jsou nulové a systém se skládá z jednoho druhu částic. Boltzmannova rovnice má nyní tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} . \tag{3.70}$$

Sestrojme dále funkcionál $H(t)$ podle definice

$$H(t) = \int f(\boldsymbol{v}, t) \ln f(\boldsymbol{v}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} . \tag{3.71}$$

Potom

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \iiiint (1 + \ln f)\, (f' f'^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} . \tag{3.72}$$

Tento výraz můžeme dále upravit podle (3.60); po kratších úpravách můžeme psát, že

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{4} \iiiint \ln \left(\frac{f' f'^{(1)}}{f f^{(1)}} \right) (f' f^{(1)} - f f^{(1)})\, g b \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{(1)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} . \tag{3.73}$$

Odtud již snadno vidíme, že integrand je vždy kladný a tedy $\partial H/\partial t$ je vždy záporné.

Maxwelova rozdělovací funkce

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

$$\Psi = 1\,, \qquad \Theta = m\boldsymbol{v}\,, \qquad \Sigma = \tfrac{1}{2}mv^2\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iiint \left(f'f'^{(1)} - ff^{(1)}\right) g b \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\varepsilon \,\mathrm{d}v^{(1)}$$

Dále $\partial H/\partial t = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže

(3.74) $$f'f'^{(1)} = ff^{(1)}\,.$$

Podle rovnice (3.70) je pak ale $\partial f/\partial t = 0$, a proto podmínka (3.74) odpovídá rovnovážnému stavu.

Na základě rovnosti (3.74) můžeme nyní určit tvar rozdělovací funkce systému, který je v rovnováze. Podle (3.74) můžeme totiž psát

(3.75) $$\ln f' + \ln f'^{(1)} = \ln f + \ln f^{(1)}\,,$$

tj. logaritmus rovnovážné rozdělovací funkce je srážkovým invariantem našeho systému. Podle našich předchozích úvah (viz str. 80) musí tedy být $\ln f$ lineární kombinací srážkových invariantů (3.65), tj.

(3.76) $$\ln f = a m + \boldsymbol{b} \,.\, m\boldsymbol{v} + c\,\tfrac{1}{2}mv^2\,,$$

kde konstanty a, $\boldsymbol{b}$ a c závisí na celkovém počtu částic, celkovém impulsu a celkové energii systému. Abychom určili tyto konstanty, přepišme (3.76) do tvaru

(3.77) $$\ln f = \ln a_0 - c\,\tfrac{1}{2}m[(v_x - b_x/c)^2 + (v_y - b_y/c)^2 + (v_z - b_z/c)^2]\,.$$

Položíme-li nyní

(3.78) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{c}\,,$$

dostaneme z (3.77), že

(3.79) $$f = a_0 \exp\left(-c\,\tfrac{1}{2}mV'^2\right).$$

Z normovací podmínky (3.4) dále máme

(3.80) $$n = \int f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = a_0 \int \exp\left(-\frac{c}{2}mV'^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{V}' = a_0 \left(\frac{2\pi}{mc}\right)^{3/2}.$$

Podobně

(3.81) $$n\boldsymbol{v}_0 = \int \boldsymbol{v} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int\left(\boldsymbol{V}' + \frac{\boldsymbol{b}}{c}\right) f \,\mathrm{d}\boldsymbol{V}' = n\frac{\boldsymbol{b}}{c}\,,$$

protože $\int \boldsymbol{V}' f \,\mathrm{d}\boldsymbol{V}' = 0$; můžeme tedy psát, že

(3.82) $$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{b}}{c}$$

a tedy

(3.83) $$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V}\,.$$

(3.5) $$\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n}\int \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,.$$

(3.6) $$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)\,.$$

Dále podle (3.80) a (3.83) platí

(3.84) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \frac{m}{2n}\int V^2 f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{m}{2n}\,a_0 \int V^2 \exp\left(-\frac{c}{2}mV^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{V} = \tfrac{3}{2}c^{-1}\,.$$

S ohledem na definici V (3.6) je ale zřejmé, že

(3.85) $$\tfrac{1}{2}m\overline{V^2} = \tfrac{3}{2}kT$$

a tedy

(3.86) $$c = \frac{1}{kT}\,,$$

kde k je Boltzmannova konstanta a T kinetická teplota plynu. Spojením předchozích výsledků dostáváme nyní rozdělovací funkci f ve tvaru

(3.87) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right).$$

Tato rozdělovací funkce se nazývá Maxwellovou rozdělovací funkcí a systém, jehož stav je takovouto funkcí popsán, se nazývá maxwellovský systém.

Podle obecné definice rozdělovací funkce je $f\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ počet částic v jednotkovém objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$. V některých případech je ale vhodné znát počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží v intervalu $V, V + \mathrm{d}V$, tj. zajímáme se pouze o absolutní hodnotu rychlosti a ne o směr. Zavedením sférických souřadnic (V, ϑ, φ) snadno získáme, že

(3.88) $$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{V} = V^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}V$$

a odtud integrací přes ϑ a φ pak dostaneme, že počet částic v jednotce objemu, jejichž rychlosti leží mezi V a $V + \mathrm{d}V$, je dán vztahem

(3.89) $$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)\mathrm{d}V.$$

Pomocí takto zapsaného rozdělení můžeme nyní snadno určit střední hodnotu nějaké fyzikální veličiny, která nezávisí na směru rychlosti.

Tak např.

(3.90) $$\overline{V} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty V^3 \mathrm{e}^{-(mV^2/2kT)}\,\mathrm{d}V = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}$$

a podobně

(3.91) $$\overline{V^2} = \frac{3kT}{m}\,.$$

Maxwelova rozdělovací funkce

- Potenciálové pole

v rovnovážném stavu, kdy $\delta_e f/\delta t = 0$, je potom

(3.99) $$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right),$$

kde $V = v - v_0$. Veličiny n, v_0 a T nyní nezávisí na v a t, ale závisí na r.

Tuto závislost si demonstrujme na jednoduchém případu, kdy $v_0 = 0$.

Potom

(3.100) $$f = n(r)\left(\frac{m}{2\pi kT(r)}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT(r)}$$

a musí platit

(3.101) $$v \,.\, \nabla_r f + \frac{F}{m} \,.\, \nabla_v f = 0 \,.$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice rozdělovací funkci (3.100), dostaneme po kratších úpravách

(3.102) $$v \,.\, \nabla_r\left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) + \frac{m}{2kT}\frac{v^2}{T} v \,.\, \nabla_r T - \frac{F}{kT} \,.\, v = 0 \,.$$

Aby tato rovnice byla splněna, musí být členy při stejných mocninách v nulové. Odtud již snadno dostaneme, že

(3.103) $$\nabla_r T = 0$$

a

(3.104) $$\nabla_r\left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right) - \frac{F}{kT} = 0 \,.$$

Z rovnice (3.104) dále plyne, že

(3.105) $$F = kT\,\nabla_r\left(\ln \frac{n}{T^{3/2}}\right).$$

Označíme-li nyní potenciál silového pole jako Φ ($F = -\nabla_r \Phi$), pak

(3.106) $$\Phi = -kT \ln n + \text{konst}$$

a pro koncentraci dostáváme

(3.107) $$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),$$

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

Rovnováha … to je strašne silné

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \,.\, \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \,.\, \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \, db \, d\varepsilon \, dv_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

=0 =0

Rovnováha

To iba ukazuje, že to nemá vnútorný rozpor

rovnováha… termodynamická rovnováha ???

kde n_0 odpovídá koncentraci v místě $\Phi = 0$. Rozdělovací funkce (3.100) má pak tvar

(3.108) $$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\Phi}{kT}\right)$$

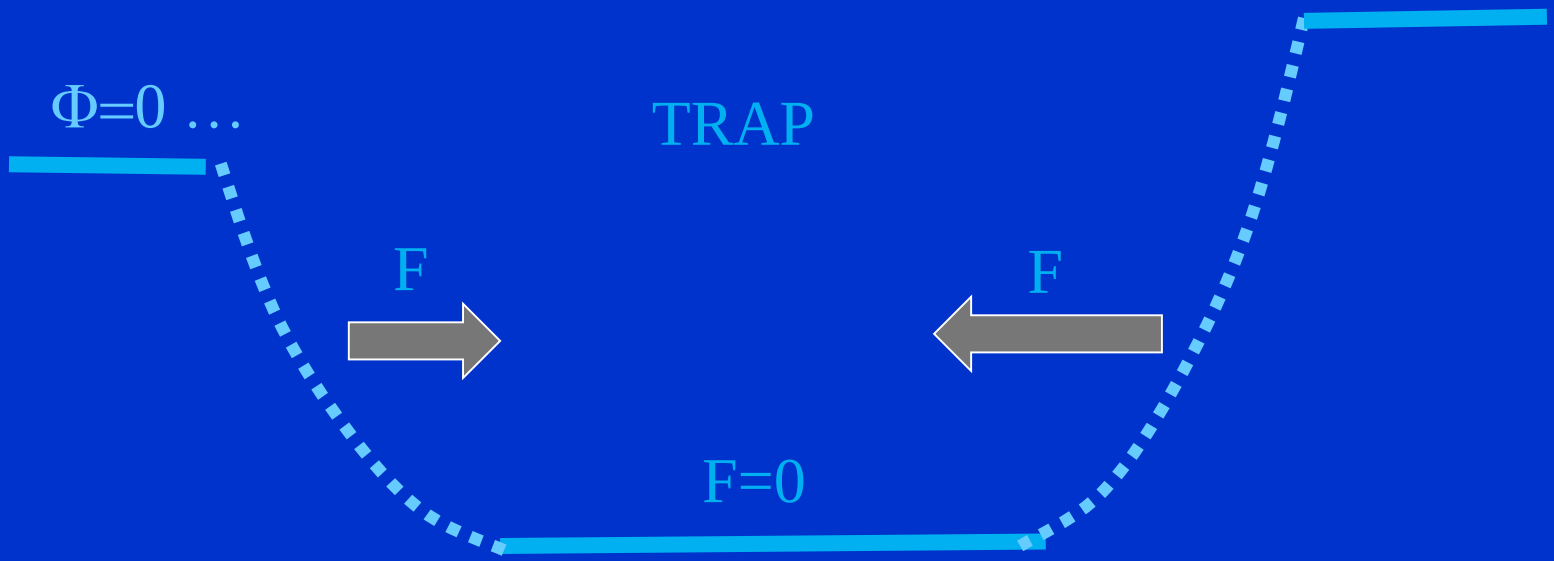
To všetko v rovnováhe

Tomu třeba rozumieť tak, aby sme to dokázali používať???

Maxwelova rozdělovací funkce

- Potenciálové pole

$$\vec{F} = -\nabla_r \Phi$$



Density of trapped particles

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp(-\frac{\Phi}{kT})$$

$$f = n_0 (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \exp(-\frac{\Phi}{kT}) \exp(-\frac{mv^2}{2kT}) \quad d\vec{v}$$

n(r)

$$f(\vec{v},\vec{r},t) = f_0(v,\vec{r},t) + \vec{v} \cdot \vec{f}_1(v,\vec{r},t)$$

Maxwelova rozdělovací funkce

■ Magnetické pole

$$\nabla_r \neq 0, \quad \vec{F} \neq 0$$

Sledujme nyní, jak vypadá rovnovážný stav systému za přítomnosti magnetického pole. Jak jsme již uvedli, je síla, způsobená tímto polem, úměrná výrazu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. V rovnici (3.96) je poslední člen na pravé straně nyní nutno nahradit členem

$$(3.109) \qquad \iiint \left\{ -\frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) - \frac{q}{m} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Jak snadno zjistíme, je však tento integrál nulový; vyskytuje se zde integrál typu

$$(3.110) \qquad B_z \iiint v_y \frac{\partial}{\partial v_x} (f \ln f)\, \mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z = B_z \iint v_y [f \ln f]_{v_x = -\infty}^{v_x = +\infty} \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_x = 0$$

a tedy rovnice (3.98) a (3.99) se nemění. Protože dále platí $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0$, zůstává v platnosti i rovnice (3.102) a platí proto i další důsledky této rovnice.

Rozšíříme nyní naše úvahy na případ systému, který se skládá z několika druhů částic. Pro jednoduchost opět předpokládejme, že $\nabla_r = 0$ a vnější síly jsou nulové. Boltzmannova rovnice pro i-tý druh částic systému má pak tvar

$$(3.111) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j .$$

H-funkce systému je nyní definována rovnicí

$$(3.112) \qquad H(t) = \sum_i \int f_i(\boldsymbol{v}_i, t) \ln f_i(\boldsymbol{v}_i, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i .$$

Potom

$$(3.113) \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \iiiint (1 + \ln f_i)(f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i ;$$

tento výraz lze dále upravit za pomoci (3.63) tak, že

$$(3.114) \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} \iiiint \left(\ln \frac{f_i' f_j'}{f_i f_j} \right) (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$

a tedy

$$(3.115) \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \leqq 0 .$$

$$(3.43) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{v_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

$$(3.96) \qquad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \iint \left\{ (1 + \ln f) \frac{\delta_e f}{\delta t} - \boldsymbol{v} \cdot \nabla_r (f \ln f) - \frac{\boldsymbol{F}}{m} \cdot \nabla_v (f \ln f) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Poslední dva členy pravé strany (3.96) při integraci vymizí (protože $\lim_{v \to \pm\infty} f \ln f = \lim_{v \to \pm\infty} f \ln f = 0$) a můžeme proto psát

$$\frac{\delta H}{\delta t} = 0$$

V rovnovážném stavu je $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$ a stejným způsobem jako v předchozích případech zjistíme, že

$$(3.116) \qquad f_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i V^2}{2 k T_i} \right),$$

kde $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0$.

Pokračováni

TZFP 4A – 20. 04. 2021

Velký Kracik pokračování

Dosadíme-li nyní (3.39), (3.40) a (3.41) do rovnice (3.38), dostaneme konečně, že

$$(3.42) \qquad A_{ij}^{+}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\,\mathrm{d}t \iiint f_j'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_j', t)\, f_i'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i', t)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\,.$$

Nyní již můžeme přistoupit k explicitnímu vyjádření rovnice (3.34). Po dosazení (3.37) a (3.42) do (3.34) za pomoci rovnice (3.35) dostaneme integrodiferenciální rovnici

$$(3.43) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic — Boltzmannovu rovnici.

Maxwellovy transportní rovnice – Rovnice přenosu

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

(3.43) $$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \,.\, \nabla_r f_i + \frac{F_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i = \sum_j \iiint (f_i' f_j' - f_i f_j)\, g_{ij} b \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\varepsilon \,\mathrm{d}v_j$$

pro výpočet rozdělovací funkce f_i i-tého druhu částic – Boltzmannovu rovnici.

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

(3.117) $$\int \left\{ \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i \right) \right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

(3.118) $$\int \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_i f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\Phi}_i) - n_i \left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}} \right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

(3.119) $$\int \Phi_i \boldsymbol{v} \,.\, \nabla_r f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \,.\, \int \Phi_i \boldsymbol{v} f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int (\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i) f_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \nabla_r \,.\, (n_i \overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i (\overline{\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i})$$

atd.

Maxwellovy transportní rovnice – Rovnice přenosu

- Integrace B. rovnice

3.5 Maxwellovy transportní rovnice (Rovnice přenosu)

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, jakým způsobem lze určit střední hodnoty některých fyzikálních veličin daného systému při znalosti rozdělovací funkce částic tohoto systému. Ukážeme si nyní, jakým způsobem je možno popsat makroskopické vlastnosti systému, aniž jsme nuceni znát rozdělovací funkce jednotlivých druhů částic tohoto systému.

Nechť funkce $\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)$ charakterizuje nějakou vlastnost našeho systému (přesněji řečeno i-tého druhu částic). Vynásobíme-li nyní touto funkcí Boltzmannovu rovnici (3.43) a dále provedeme-li integraci takto získané rovnice přes rychlostní prostor i-té částice, dostaneme

$$(3.117)\qquad \int\left\{\Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r f_i + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i\right)\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \int \Phi_i \frac{\delta_e f_i}{\delta t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i \,.$$

Levou stranu této rovnice můžeme dále upravit. Pro první člen můžeme psát

$$(3.118)\qquad \int \Phi_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_i, t)\frac{\partial f_i}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial}{\partial t}\int \Phi_i f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = $$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(n_i\bar{\Phi}_i) - n_i\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right),$$

druhý člen je možno rozepsat, tj.

$$(3.119)\qquad \int \Phi_i \boldsymbol{v} \,.\, \nabla_r f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \nabla_r \,.\, \int \Phi_i \boldsymbol{v} f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i - \int (\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i) f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i =$$

$$= \nabla_r \,.\, (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i(\overline{\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i})$$

atd.

a konečně třetí člen je možno upravit zcela analogicky, tj.

$$(3.120)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \iint \frac{F_{ix}}{m_i}\int \Phi_i \frac{\partial f_i}{\partial v_{ix}}\,\mathrm{d}v_{ix}\,\mathrm{d}v_{iy}\,\mathrm{d}v_{iz} + \ldots =$$

$$= \iint \frac{F_{ix}}{m_i}\int \frac{\partial}{\partial v_{ix}}(\Phi_i f_i)\,\mathrm{d}v_{ix}\,\mathrm{d}v_{iy}\,\mathrm{d}v_{iz} - \iint \frac{F_{ix}}{m_i}\int f_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial v_{ix}}\,\mathrm{d}v_{ix}\,\mathrm{d}v_{iy}\,\mathrm{d}v_{iz} + \ldots ;$$

protože $\lim_{v_i \to \pm\infty}(\Phi_i f_i) = 0$, je možno dále psát

$$(3.121)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -\int \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v \Phi_i f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -n_i\left(\overline{\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v \Phi_i}\right).$$

Jestliže $\boldsymbol{F}_i$ nezávisí na rychlosti, je možno $\boldsymbol{F}_i/m_i$ vyjmout před integrál a (3.121) má pak tvar

$$(3.122)\qquad \int \Phi_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, \nabla_v f_i\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = -n_i \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \,.\, (\overline{\nabla_v \Phi_i}) \,.$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\qquad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \,.\, (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{\boldsymbol{v}_i \,.\, \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \,.\, \nabla_v \Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0 \,.$$

Rovnice (3.123) je obecnou rovnicí přenosu pro danou veličinu Φ_i, nazývá se Maxwellovou transportní rovnicí. Sumací (3.123) přes všechny druhy částic daného systému pak dostaneme rovnici přenosu pro veličinu Φ celého systému.

Maxwellovy transportní rovnice – Zákony zachování

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\overline{\Phi_i})}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i\left[\overline{\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}\right)} + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r\Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v\Phi_i} + \delta\overline{\Phi}_i\right] = 0\,.$$

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednočásticový systém*) a nechť funkce Φ je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

a) $\Phi = \Psi = 1$.

Potom $\overline{\Psi} = 1$, $\overline{\Psi V} = \mathrm{D}\Psi/\mathrm{D}t = \nabla_r\Psi = \nabla_v\Psi = \delta\overline{\Psi} = 0$ a z (3.129) dostaneme

$$(3.131)\quad \frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + n\,\nabla_r \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0\,.$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n\boldsymbol{v}_0) = 0\,,$$

Pro i-te částice

Maxwellovy transportní rovnice – Zákony zachování

- Integrace B. rovnice
- Vztahy mezi veličinami

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\overline{\Phi_i})}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i \boldsymbol{v}_i}) - n_i\left[\overline{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}\right)} + \overline{\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_i} \cdot \nabla_v \Phi_i} + \delta\overline{\Phi}_i\right] = 0 .$$

Položíme-li dále

$$(3.127)\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla_r$$

Uvažujme pro jednoduchost neutrální jednočásticový systém*) a nechť funkce Φ je rovna postupně srážkovým invariantům (3.65).

a) $\Phi = \Psi = 1$.

Potom $\overline{\Psi} = 1$, $\overline{\Psi \boldsymbol{V}} = \mathrm{D}\Psi/\mathrm{D}t = \nabla_r \Psi = \nabla_V \Psi = \delta\overline{\Psi} = 0$ a z (3.129) dostaneme

$$(3.131)\quad \frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} + n\,\nabla_r \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0 .$$

S použitím (3.127) můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$(3.132)\quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n\boldsymbol{v}_0) = 0 ,$$

což je zákon zachování počtu částic. Položíme-li $\Psi = m$, dostaneme z (3.132) známou rovnici kontinuity

$$(3.133)\quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0 .$$

b) $\Phi = \boldsymbol{\Theta} = m\boldsymbol{V}$.

Potom $\overline{\boldsymbol{\Theta}} = \delta\overline{\boldsymbol{\Theta}} = \nabla_r \boldsymbol{\Theta} = \mathrm{D}\boldsymbol{\Theta}/\mathrm{D}t = 0$, $n\overline{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{V}} = \mathbf{p}$, $\nabla_V \boldsymbol{\Theta} = m\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jednotkový tenzor); rovnice (3.127) dává

$$(3.134)\quad \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{D}t} = n\boldsymbol{F} - \nabla_r \cdot \mathbf{p} ,$$

což je zákon zachování hybnosti.

c) $\Phi = \Sigma = \frac{1}{2}mV^2$.

Potom $\mathrm{D}\Sigma/\mathrm{D}t = \nabla_r \Sigma = \delta\overline{\Sigma} = 0$, $\nabla_V \Sigma = m\boldsymbol{V}$, $n\overline{(\nabla_V \Sigma)\,\boldsymbol{V}} = p$, podle (3.16) $n\overline{\Sigma \boldsymbol{V}} = \boldsymbol{q}$; rovnici (3.129) lze nyní upravit na tvar

$$(3.135)\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(n\overline{\Sigma}) + n\overline{\Sigma}\,\nabla_r \cdot \boldsymbol{v}_0 + \nabla_r \cdot \boldsymbol{q} + \mathbf{p} : \nabla_r \boldsymbol{v}_0 - n\overline{\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}} = 0 .$$

Uvážíme-li nyní, že

$$(3.136)\quad \overline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})\,\boldsymbol{V}} = 0$$

platí i pro případ vnější síly typu (3.49), můžeme dále (s použitím rovnice kontinuity (3.131) přepsat rovnici (3.135) do tvaru

$$(3.137)\quad n\frac{\mathrm{D}\overline{\Sigma}}{\mathrm{D}t} = -(\mathbf{p} : \nabla_r \boldsymbol{v}_0 + \nabla_r \cdot \boldsymbol{q}) ,$$

což je zákon zachování energie.

Transportní rovnice pro plazma

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

$$(3.123)\quad \frac{\partial(n_i\bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n_i\overline{\Phi_i v_i}) - n_i\left[\left(\overline{\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}}\right) + \overline{v_i \cdot \nabla_r\Phi_i} + \overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i} \cdot \nabla_v\Phi_i} + \delta\bar{\Phi}_i\right] = 0 .$$

Některé předpoklady jsou příliš omezující, ale vedou k zjednodušeni řešení

3.7 Úprava transportních rovnic pro plazma

Rovnice (3.188), (3.189), (3.191) a (3.192) platí obecně pro vícesložkové plazma. Jsou však velmi složité, a proto se k praktickému řešení konkrétních úloh příliš nehodí. Upravíme proto tyto rovnice na základě některých předpokladů na přijatelnější a známější tvar. Předpokládejme, že*):

a) Plazma je kvasineutrální, tj.

$$(3.194)\qquad \sigma_e \sim 0 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{j} .$$

Prostorový náboj σ_e můžeme zanedbat v pohybové rovnici (3.187) resp. (3.188) a v rovnici pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (3.189). σ_e však není možno zanedbat v Poissonově rovnici.

$$(3.203)\qquad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i}\nabla_r \cdot (\varrho v_0) + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

$$(3.204)\qquad \nabla_r \cdot (\varrho v_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

$$(3.203')\qquad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e}\nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 .$$

Plazma,Předpoklady

b) Hmotnost elektronů m_e je mnohem menší ve srovnání s hmotností iontů m_i, tj.

$$(3.195)\qquad \frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad \text{a také} \quad \frac{Z_i m_e}{m_i} \ll 1 .$$

c) Plazma je téměř izotropní a v_0 je dostatečně malé, tj. elektrický proud $\boldsymbol{j}$, v_0 a tlakové gradienty jsou poruchy prvního řádu a proto členy, obsahující tyto veličiny ve druhé mocnině, stejně tak jako gradienty $\boldsymbol{j}$ a v_0 můžeme zanedbat.

d) Plazma není daleko od termodynamické rovnováhy, tj. parciální tlaky elektronů $\mathbf{p}_e$ a iontů $\mathbf{p}_i$ jsou téhož řádu; podle b) pak také platí

$$(3.196)\qquad \frac{Z_i m_e}{m_i}\mathbf{p}_i \ll \mathbf{p}_e ,$$

což znamená, že elektrokinetický tenzor iontů je zanedbatelný ve srovnání s elektrokinetickým tenzorem elektronů.

e) Tenzor $\mathbf{p}$ nahradíme skalárním tlakem $p = p_e + p_i$.

f) Plazma je dvousložkové; je tvořeno elektrony a ionty.

Na základě těchto předpokladů můžeme dále psát, že

$$(3.197)\qquad n_i Z_i \cong n_e = n$$

$$(3.198)\qquad \varrho = m_e n_e + m_i n_i \sim \varrho_i ,$$

$$(3.199)\qquad v_0 = \frac{1}{\varrho}(\varrho_i \bar{v}_i + \varrho_e \bar{v}_e) \cong \bar{v}_i .$$

Dále

$$(3.200)\qquad \boldsymbol{j} = Z_i e n_i \overline{V}_i - e n_e \overline{V}_e \cong Z_i e n_i \bar{v}_i - e n_e \bar{v}_e ;$$

potom

$$(3.201)\qquad n_e \bar{v}_e = Z_i n_i \bar{v}_i - \frac{\boldsymbol{j}}{e} \cong \frac{Z_i}{m_i}\varrho v_0 - \frac{\boldsymbol{j}}{e} .$$

Na základě výše uvedených předpokladů můžeme psát:

a) Pro jednotlivé složky plazmatu:

1) Rovnici kontinuity

$$(3.202)\qquad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{m_i}\nabla_r \cdot (\varrho v_0) = 0 ,$$

Transportní rovnice pro plazma

(3.203) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i} \nabla_r . (\varrho v_0) + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

(3.204) $$\nabla_r . (\varrho v_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

(3.203′) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Pro elektrony

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

(3.123) $$\frac{\partial (n_i \overline{\Phi_i})}{\partial t} + \nabla_r . (n_i \overline{\Phi_i v_i}) - n_i \left[\overline{\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right)} + \overline{v_i . \nabla_r \Phi_i} + \overline{\frac{F_i(v_i)}{m_i} . \nabla_v \Phi_i} + \delta \overline{\Phi}_i \right] = 0 .$$

$$\Phi_i = m_i V_i .$$

2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

(3.205) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i \delta_e(m_i \overline{V_i}) ,$$

(3.206) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + v_e \times B) - n_e F_e = n_e \delta_i(m_e \overline{V_e}) .$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen $n_i \delta_e(m_i \overline{V_i})$, resp. $n_e \delta_i(m_e V_e)$. Podle (3.158) ale platí

(3.158) $$\sum_i n_i \delta(\overline{\Phi_i}) = \sum_i n_i \sum_{j \neq i} \delta_j(\overline{\Phi_i}) = 0 .$$

Součet hybnosti v těžiskove soustavě,

Jenom e a i

(3.207) $$n_i \delta_e(m_i \overline{V_i}) + n_e \delta_i(m_e \overline{V_e}) = 0 , \quad \text{tj.}$$

$$n_e \delta_i(m_e \overline{V_e}) = -n_i \delta_e(m_i \overline{V_i})$$

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

V některých případech je možno předpokládat, že*)

(3.208) $$n_e \delta_i(m_e \overline{V_e}) = -n_i \delta_e(m_i \overline{V_i}) = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\overline{V_e} - \overline{V_i}) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů, $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

(3.205′) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

(3.206′) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) .$$

Zmena hybnosti při zrážke ~ hybnost el.

Ľahka gulička zmení „relatívnu rýchlosť“

Transportní rovnice pro plazma

(3.203) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i} \nabla_r . (\varrho v_0) + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

(3.204) $$\nabla_r . (\varrho v_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

(3.203′) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Dosadíme-li nyní (3.118), (3.119) a (3.121) do (3.117), dostaneme

(3.123) $$\frac{\partial (n_i \bar{\Phi}_i)}{\partial t} + \nabla_r . (n_i \overline{\Phi_i v_i}) - n_i \left[\left(\frac{\overline{\partial \Phi_i}}{\partial t} \right) + \overline{v_i . \nabla_r \Phi_i} + \frac{\overline{F_i(v_i)}}{m_i} . \nabla_v \Phi_i + \delta \bar{\Phi}_i \right] = 0 .$$

$$\Phi_i = m_i V_i .$$

2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

(3.205) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) ,$$

(3.206) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + v_e \times B) - n_e F_e = n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) .$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen $n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i)$, resp. $n_e \delta_i(m_e V_e)$. Podle (3.158) ale platí

(3.207) $$n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) + n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = 0 \quad \text{tj.}$$

$$n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i)$$

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

V některých případech je možno předpokládat, že*)

(3.208) $$n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{V}_e - \bar{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

Tu je chyba

(3.205′) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

(3.206′) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) .$$

(3.158) $$\sum_i n_i \delta(\bar{\Phi}_i) = \sum_i n_i \sum_{j \neq i} \delta_j(\bar{\Phi}_i) = 0 .$$

Treba postupovať veľmi opatrne z hľadiska zameny iont ← → neutrálna častica

Součet hybnosti v těžiskove soustavě, jenom e a i

Zmena hybnosti při zrážke ~ hybnost el.

Ľahka gulička zmení „relatívnu rychlosť“

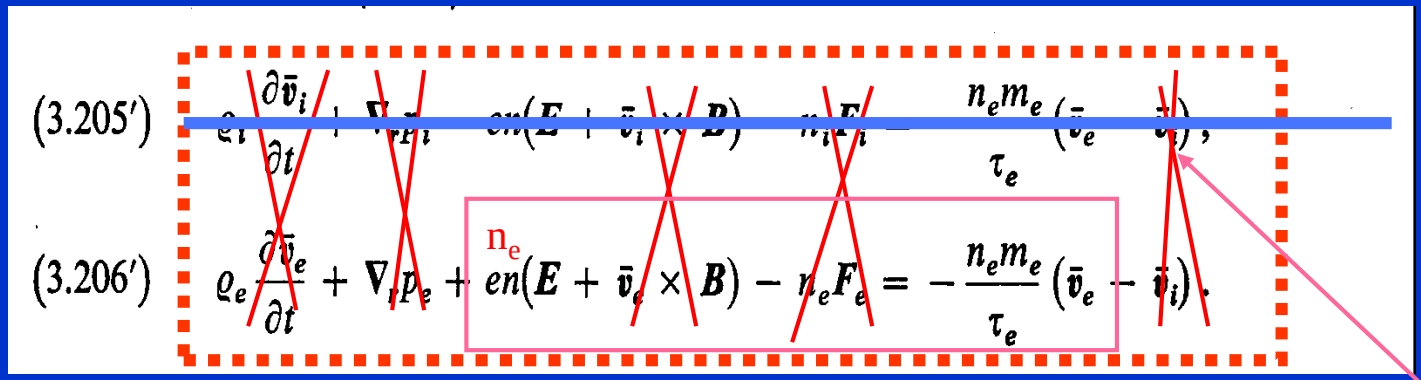
Změna při přechodu na neutrální plyn různých koncentracich…. Ale rovnost ve změně hybnosti zůstane … není to triviální

Je to pre stredné hodnoty rýchlosti

Mohli by sme to chápať jako častice i-tého druhu rovnica zachovania hybnosti … by platili

Interpretace transportní rovnice pro plazma

- Pohyb elektronů v elektrickém poli



$$(3.205')\quad \varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_i p_i - en(\boldsymbol{E} + \bar{v}_i \times \boldsymbol{B}) - n_i \boldsymbol{F}_i = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i),$$

$$(3.206')\quad \varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_i p_e + en(\boldsymbol{E} + \bar{v}_e \times \boldsymbol{B}) - n_e \boldsymbol{F}_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i).$$

n_e

$$e n_e E = n_e m_e \underline{v}_e / \tau_e$$

Neglected ion velocity

Electron-ion

$$\boldsymbol{J_e} = e n_e \underline{\boldsymbol{v}_e} = (e^2 n_e \tau_e / m_e) \cdot \boldsymbol{E}$$

Electron/ion plasma

Electron/ion/neutral plasma

vodivost

Doležité bolo, že jedné sú ťažké a elektrony ľahké ….

Treba postupovať veľmi opatrne z hľadiska zameny iont ← → neutrálna častica

Transportní rovnice pro plazma

- Důslednější řešení

(3.205′) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i),$$

(3.206′) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i).$$

Prúdy by boli vhodnejšie

b) Pro systém nabitých částic (plazma jako celek):

1) Rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\varrho v_0) = 0,$$

zákon zachování náboje

(3.210) $$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} + \nabla_r \cdot j = 0.$$

2) Pohybovou rovnici (zákon zachování impulsu)

(3.211) $$\varrho \frac{\partial v_0}{\partial t} = -\nabla_r p + j \times B + \sum_k n_k F_k.$$

3) Rovnici pro proudovou hustotu j

(3.212) $$\frac{\partial j}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(E + v_0 \times B) + \frac{e}{m_e} j \times B - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \sum_k \frac{Z_k e}{m_k} n_k F_k =$$

$$= \frac{Z_i e n_i}{m_i}\delta_e(m_i \bar{V}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \bar{V}_e),$$

?

protože podle (3.199) a (3.201) platí

(3.213) $$\sum_k \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\bar{v}_k = \frac{e^2}{m_e}\left[n_e \bar{v}_e + \frac{Z_i^2 n_i m_e}{m_i}\bar{v}_i\right] \cong$$

$$\cong \frac{e^2}{m_e}\left[-\frac{j}{e} + v_0 Z_i n_i\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\right] \cong \frac{e^2}{m_e}\left(n_e v_0 - \frac{j}{e}\right).$$

Pravou stranu (3.212) můžeme ještě dále upravit, protože (3.208) můžeme psát jako

(3.214) $$n_e \delta_i(m_e \bar{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \bar{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{V}_e - \bar{V}_i) \cong +\frac{m_e}{\tau_e e} j.$$

Potom ale můžeme psát, že

(3.215) $$\frac{Z_i e n_i}{m_i}\delta_e(m_i \bar{V}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \bar{V}_e) = -\frac{e n_e}{m_i}\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\delta_i(m_e \bar{V}_e) \cong$$

$$\cong -\frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \bar{V}_e) \cong -\frac{j}{\tau_e}$$

Transportní rovnice pro plazma – vodivost – zobecněný Ohmův zákon

b) Pro systém nabitých částic (plazma jako celek):

1) Rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla_r \cdot (\varrho \boldsymbol{v}_0) = 0 , \tag{3.209}$$

zákon zachování náboje

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} + \nabla_r \cdot \boldsymbol{j} = 0 . \tag{3.210}$$

2) Pohybovou rovnici (zákon zachování impulsu)

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} = -\nabla_r p + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} + \sum_k n_k \boldsymbol{F}_k . \tag{3.211}$$

3) Rovnici pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \sum_k \frac{Z_k e}{m_k} n_k \boldsymbol{F}_k = \tag{3.212}$$

$$= \frac{Z_i e n_i}{m_i}\delta_e(m_i \overline{V}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \overline{V}_e) ,$$

protože podle (3.199) a (3.201) platí

$$\sum_k \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\bar{\boldsymbol{v}}_k = \frac{e^2}{m_e}\left[n_e \bar{\boldsymbol{v}}_e + \frac{Z_i^2 n_i m_e}{m_i}\bar{\boldsymbol{v}}_i\right] \cong \tag{3.213}$$

$$\cong \frac{e^2}{m_e}\left[-\frac{\boldsymbol{j}}{e} + v_0 Z_i n_i\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\right] \cong \frac{e^2}{m_e}\left(n_e \boldsymbol{v}_0 - \frac{\boldsymbol{j}}{e}\right).$$

Pravou stranu (3.212) můžeme ještě dále upravit, protože (3.208) můžeme psát jako

$$n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\overline{V}_e - \overline{V}_i) \cong +\frac{m_e}{\tau_e e}\boldsymbol{j} . \tag{3.214}$$

Potom ale můžeme psát, že

$$\frac{Z_i e n_i}{m_i}\delta_e(m_i \overline{V}_i) - \frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \overline{V}_e) = -\frac{e n_e}{m_e}\left(1 + \frac{Z_i m_e}{m_i}\right)\delta_i(m_e \overline{V}_e) \cong \tag{3.215}$$

$$\cong -\frac{e n_e}{m_e}\delta_i(m_e \overline{V}_e) \cong -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e}$$

a rovnice pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (zobecněný Ohmův zákon) má nyní tvar

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \tag{3.216}$$

$$- \sum_{(k)} \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k}\boldsymbol{F}_k = -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e} .$$

Zde je ovšem nutno poznamenat, že zobecněný Ohmův zákon (3.216) je použitelný pro plně ionizované plazma opět pouze v prvním přiblížení. Obecně totiž může pravá strana této rovnice záviset na magnetickém poli uvnitř plazmatu a gradientu teploty elektronů. Jestliže zanedbáme $\nabla_r T_e$, pak je pravá strana (3.216) stále ještě složena ze dvou členů; jestliže systém není daleko rovnováhy, pak přesnější tvar pravé strany rovnice (3.216) je

V magnetickém poli

$$-\frac{1}{\tau_e}\left(\frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{1{,}96} + \boldsymbol{j}_\perp\right) \tag{3.217}$$

kde $\boldsymbol{j}_\parallel$ je složka proudové hustoty ve směru magnetického pole a $\boldsymbol{j}_\perp$ je složka proudové hustoty ve směru kolmém na magnetické pole.

Rozdíl mezi (3.217) a (3.215) resp. pravou stranou (3.216), si ukážeme názorně na příkladu. Předpokládejme stacionární stav, tj. $\partial \boldsymbol{j}/\partial t = 0$ a nechť $\boldsymbol{F}_k = 0$. Z rovnice (3.216) pak dostaneme

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{n_e e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} , \tag{3.218}$$

kde

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{n_e e}\nabla_r p_e \tag{3.219}$$

a

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} \tag{3.220}$$

VODIVOST

je vodivost plazmatu. Vyjádříme-li z (3.218) $\boldsymbol{j}$, dostaneme po menších úpravách, že

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\} , \tag{3.221}$$

kde

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{B}}{B} \quad \text{a} \quad \omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \tag{3.222}$$

je elektronová cyklotronová frekvence.

Transportní rovnice pro plazma - vodivost

a rovnice pro proudovou hustotu $\boldsymbol{j}$ (zobecněný Ohmův zákon) má nyní tvar

(3.216) $$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{e^2 n_e}{m_e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{e}{m_e}\nabla_r p_e - \\ - \sum_{(k)} \frac{Z_k^2 e^2 n_k}{m_k} \boldsymbol{F}_k = -\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_e}.$$

Zde je ovšem nutno poznamenat, že zobecněný Ohmův zákon (3.216) je použitelný pro plně ionizované plazma opět pouze v prvním přiblížení. Obecně totiž může pravá strana této rovnice záviset na magnetickém poli uvnitř plazmatu a gradientu teploty elektronů. Jestliže zanedbáme $\nabla_r T_e$, pak je pravá strana (3.216) stále ještě složena ze dvou členů; jestliže systém není daleko rovnováhy, pak přesnější tvar pravé strany rovnice (3.216) je

(3.217) $$-\frac{1}{\tau_e}\left(\frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{1{,}96} + \boldsymbol{j}_\perp\right),$$

kde $\boldsymbol{j}_\parallel$ je složka proudové hustoty ve směru magnetického pole a $\boldsymbol{j}_\perp$ je složka proudové hustoty ve směru kolmém na magnetické pole.

Rozdíl mezi (3.217) a (3.215) resp. pravou stranou (3.216), si ukážeme názorně na příkladu. Předpokládejme stacionární stav, tj. $\partial \boldsymbol{j}/\partial t = 0$ a nechť $\boldsymbol{F}_k = 0$. Z rovnice (3.216) pak dostaneme

(3.218) $$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{n_e e}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B},$$

kde

(3.219) $$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{n_e e}\nabla_r p_e$$

a

(3.220) $$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

je vodivost plazmatu. Vyjádříme-li z (3.218) $\boldsymbol{j}$, dostaneme po jistých úpravách, že

(3.221) $$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\},$$

kde

(3.222) $$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{B}}{B} \quad \text{a} \quad \omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

je elektronová cyklotronová frekvence.

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

vodivost

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

cyklotronová frekvence

Jestliže nyní použijeme na pravé straně (3.216) výrazu (3.217), dostaneme, že

(3.223) $$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{\boldsymbol{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{1}{n_e e}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}),$$

kde

(3.224) $$\sigma_\parallel = 1{,}96\sigma \quad \text{a} \quad \sigma_\perp = \sigma;$$

vyloučením $\boldsymbol{j}$ pak dostaneme

(3.225) $$\boldsymbol{j} = \sigma_\parallel \boldsymbol{E}'_\parallel + \frac{\sigma_\perp}{1 + \omega_{ce}^2 \tau_e^2}\{\boldsymbol{E}'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{E}')\}.$$

Odtud již vidíme, že i v tak jednoduchém případě, kdy $\nabla_r T_e = 0$ a systém je blízko rovnováhy, je vodivost plazmatu závislá na směru magnetického pole.

V obecném případě má vodivost plazmatu tenzorový charakter.*)

Vodivost a ani netušíme EEDF..? Je to vobec možné…? A čo σ(v) ??

Ja tomu neverí, …. Ale tie podmienky sú asi iné než plazma v našej leborke….

A čo σ(v) ??

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e}$$

cyklotronová frekvence

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$

vodivost

Srážky a cyklotronová frekvence

$$(3.208)\quad n_e\,\delta_i(m_e\bar{V}_e) = -\,n_i\,\delta_e(m_i\bar{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{V}_e - \bar{V}_i) = -\frac{n_e m_e}{\tau_e}(\bar{v}_e - \bar{v}_i)\,,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence.

Jestliže nyní použijeme na pravé straně (3.216) výrazu (3.217), dostaneme, že

$$(3.223)\quad E' = \frac{j_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{j_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{1}{n_e e}(j \times B)\,,$$

kde

$$(3.224)\quad \sigma_\parallel = 1{,}96\sigma \quad \text{a} \quad \sigma_\perp = \sigma\,;$$

vyloučením j pak dostaneme

$$(3.225)\quad j = \sigma_\parallel E'_\parallel + \frac{\sigma_\perp}{1 + \omega_{ce}^2\tau_e^2}\{E'_\perp + \omega_{ce}\tau_e(h \times E')\}\,.$$

Odtud již vidíme, že i v tak jednoduchém případě, kdy $\nabla T_e = 0$ a systém je blízko rovnováhy, je vodivost plazmatu závislá na směru magnetického pole.

V obecném případě má vodivost plazmatu tenzorový charakter.*)

rovnice pro drift

$$\vec{\bar{v}} = -\frac{e}{m\nu_1}\vec{E} = \mu\vec{E}$$

$$\nu_1 = 2\pi N v \int_0^\pi (1 - \cos\chi)\,\sigma(\chi, v)\sin\chi\,d\chi$$

Treba postupovať veľmi opatrne
z hľadiska zameny iont ← → neutrálna častica

Quo vadis domine nostra

- Shrňte, co se od účastníků očekává.
- Shrňte, co se očekává od vás.

Transportní rovnice pro plazma

- Plazma,Předpoklady

(3.203) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{Z_i}{m_i} \nabla_r . (\varrho v_0) + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

Rovnici je někdy možno ještě zjednodušit předpokladem c), tj.

(3.204) $$\nabla_r . (\varrho v_0) = 0 ;$$

potom můžeme psát

(3.203′) $$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{e} \nabla_r . j = 0 .$$

2) Pohybové rovnice (na základě (3.161))

(3.205) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) ,$$

(3.206) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + v_e \times B) - n_e F_e = n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) .$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupuje člen $n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i)$, resp. $n_e \delta_i(m_e V_e)$. Podle (3.158) ale platí

(3.207) $$n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) + n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = 0 , \quad \text{tj.}$$
$$n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = -n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i)$$

a tedy rovnice (3.205) a (3.206) jsou vzájemně spolu svázány.

V některých případech je možno předpokládat, že*)

(3.208) $$n_e \delta_i(m_e \overline{V}_e) = - n_i \delta_e(m_i \overline{V}_i) = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\overline{V}_e - \overline{V}_i) = - \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

kde τ_e je střední doba mezi srážkami mezi elektrony a ionty resp. mezi částicemi různých druhů; $\tau_e^{-1} = \nu$ je pak srážková frekvence. Pohybové rovnice (3.205) a (3.206) můžeme za pomoci (3.208) psát ve tvaru

(3.205′) $$\varrho_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nabla_r p_i - en(E + \bar{v}_i \times B) - n_i F_i = \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) ,$$

(3.206′) $$\varrho_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \nabla_r p_e + en(E + \bar{v}_e \times B) - n_e F_e = - \frac{n_e m_e}{\tau_e} (\bar{v}_e - \bar{v}_i) .$$